

Treball de Fi de Màster

## **Màster Universitari en Enginyeria Industrial**

### **Avantprojecte del mecanisme d'un rellotge fet amb tren epicicloïdal**

#### **MEMÒRIA**

**Autor:** Alba Martí Armengol  
**Director:** Joaquim M. Veciana  
**Convocatòria:** Juny de 2018



Escola Tècnica Superior  
d'Enginyeria Industrial de Barcelona





## Resum

En el document que es presenta es realitza una primera etapa de l'avantprojecte mecànic d'un rellotge de sobretaula o paret en la que la transmissió es realitza mitjançant trens epicicloïdals. S'enfoca el predisseny dels seus components a la fabricació en impressió 3D per filament, per facilitar la pròpia fabricació i muntatge.

En el desenvolupament d'aquest treball s'aprofundeix en l'estudi dinàmic del mecanisme d'escapament i el seu sistema oscil·lant, fent un model de simulació amb programari MATLAB-SIMULINK de la transmissió no lineal del sistema.

L'avantprojecte també inclou l'estudi de l'estat de l'art de tipus de sistemes de transmissió, de sistemes d'emmagatzematge d'energia en rellotges, de tipus de sistemes oscil·lants i tipus de mecanismes d'escapament.

El treball és una bona base per a desenvolupar el disseny de tots els elements del rellotge en detall. També ho és per a una posterior optimització del mecanisme de l'escapament variant els paràmetres geomètrics del mateix per arribar a una millor solució usant el model SIMULINK.



## Sumari

<b>1. LLISTAT DE FIGURES</b>	<b>6</b>
<b>2. LLISTAT DE TAULES</b>	<b>9</b>
<b>3. LLISTAT DE GRÀFICS</b>	<b>10</b>
<b>4. PREFACI</b>	<b>11</b>
4.1. Origen del projecte.....	11
4.2. Motivació.....	11
<b>5. INTRODUCCIÓ</b>	<b>13</b>
5.1. Objectius del projecte .....	13
5.2. Abast del projecte.....	13
<b>6. ESTAT DE L'ART DELS MECANISMES QUE CONFIGUREN ELS RELLOTGES DE PARET</b>	<b>15</b>
6.1. Sistemes de transmissió.....	16
6.1.1. Perfil cicloïdal.....	16
6.1.2. Perfil d'evolvent de cercle .....	17
6.2. Sistemes d'emmagatzematge d'energia.....	18
6.2.1. Barrilet i molla .....	18
6.3. Mecanisme d'escapament.....	23
6.3.1. Elements d'un sistema d'escapament.....	23
6.3.2. Funcionament d'un sistema d'escapament .....	24
6.3.3. Eficiència i pèrdua d'energia .....	26
6.3.4. Disseny circular, disseny equidistant i disseny semi-tangencial.....	31
6.3.5. Escapament per un rellotge amb volant d'inèrcia. Escapament suís.....	34
6.4. Sistemes d'oscil·lació.....	37
6.4.1. Sistema Foliot.....	37
6.4.2. Pèndol.....	38
6.4.3. Volant d'inèrcia balancejat.....	39
<b>7. ESTUDI CINEMÀTIC DEL TREN EPICICLOÏDAL - DIMENSIONAT DEL SISTEMA</b>	<b>41</b>

7.1.	Dimensionament. Consideracions generals.....	41
7.1.1.	Estructura.....	42
7.1.2.	Sistema molla.....	43
7.1.3.	Sistema tren d'engranatges.....	46
7.1.4.	Sistema volant d'inèrcia.....	48
7.1.5.	Components normalitzats .....	50
7.2.	Càlcul del barril i molla .....	52
7.3.	Càlcul del tren d'engranatges.....	61
7.3.1.	Primera etapa.....	61
7.3.2.	Segona etapa .....	61
7.3.3.	Tercera etapa.....	62
7.3.4.	Reduccions del tren d'engranatges.....	63
7.4.	Dimensionat de l'escapament .....	64
<b>8.</b>	<b>SIMULACIÓ DINÀMICA DEL CONJUNT “VOLANT D'INÈRCIA – ESCAPAMENT – CATALINA” .....</b>	<b>67</b>
8.1.	Simplificacions.....	67
8.1.1.	Simplificacions en les equacions de moviment.....	67
8.1.2.	Simplificacions en la simulació amb el programari MATLAB .....	67
8.2.	Relacions geomètriques .....	68
8.2.1.	Àncora - Volant .....	68
8.2.2.	Catalina – Àncora.....	69
8.3.	Equacions del moviment.....	72
8.3.1.	Fase 1.....	73
8.3.2.	Fase 2.....	74
8.3.3.	Fase 3.....	76
8.3.4.	Fase 4.....	77
8.3.5.	Fase 5.....	79
8.3.6.	Fase 6.....	79
8.3.7.	Equacions de moviment de la segona meitat del cicle.....	80
8.4.	Expressions del model .....	81



8.5. Simulació del model.....	83
8.5.1. Resultats de la simulació del model.....	86
<b>9. PLANIFICACIÓ DEL PROJECTE .....</b>	<b>89</b>
<b>10. ESTUDI ECONÒMIC .....</b>	<b>91</b>
10.1. Desenvolupament del projecte .....	91
10.2. Fabricació del prototip .....	92
<b>11. IMPACTE AMBIENTAL .....</b>	<b>95</b>
11.1. Impressió en 3D .....	95
11.2. Rodaments i coixinets SKF.....	96
11.3. Recursos energètics.....	97
<b>CONCLUSIONS .....</b>	<b>99</b>
Línies de millora.....	100
<b>AGRAÏMENTS .....</b>	<b>101</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>102</b>
Bibliografia complementària.....	103

# 1. Llistat de figures

<i>Figura 1. Esquema d'un mecanisme de rellotgeria.....</i>	<i>15</i>
<i>Figura 2. Perfil cicloïdal.....</i>	<i>16</i>
<i>Figura 3. Perfil d'evolvent.....</i>	<i>17</i>
<i>Figura 4. Barril i molla.....</i>	<i>18</i>
<i>Figura 5. Mecanisme lleva reguladora.....</i>	<i>20</i>
<i>Figura 6. Mecanisme de cargol. Molla tensada.....</i>	<i>21</i>
<i>Figura 7. Mecanisme de cargol. Molla destensada.....</i>	<i>21</i>
<i>Figura 8. Sistema d'escapament Graham.....</i>	<i>23</i>
<i>Figura 9. Escapament Graham. Palet d'entrada i palet de sortida.....</i>	<i>24</i>
<i>Figura 10. Funcionament d'un sistema d'escapament. Etapa 1.....</i>	<i>24</i>
<i>Figura 11. Funcionament d'un sistema d'escapament. Etapa 2.....</i>	<i>25</i>
<i>Figura 12. Funcionament d'un sistema d'escapament. Etapa 3.....</i>	<i>25</i>
<i>Figura 13. Funcionament d'un sistema d'escapament. Etapa 4.....</i>	<i>26</i>
<i>Figura 14. Força exercida per la dent de la catalina sobre l'àncora.....</i>	<i>27</i>
<i>Figura 15. Esquema de forces que exerceix la dent de la catalina sobre el palet de sortida d'un escapament Graham.....</i>	<i>27</i>
<i>Figura 16. Angle <math>\alpha</math>, angle entre la direcció de la força <math>F_{c1}</math> i la cara del palet de l'àncora.....</i>	<i>28</i>
<i>Figura 17. Còpia de l'esquema de forces que exerceix la dent de la catalina sobre el palet d'entrada.....</i>	<i>29</i>
<i>Figura 18. Escapament Graham.....</i>	<i>30</i>
<i>Figura 19. Marge interior i exterior (Inside i outside drop).....</i>	<i>30</i>
<i>Figura 20. Escapament Graham. Disseny circular.....</i>	<i>32</i>
<i>Figura 21. Escapament Graham. Disseny equidistant.....</i>	<i>33</i>





<i>Figura 22. Escapament amb doble rodet.....</i>	<i>34</i>
<i>Figura 23. Components del doble rodet.....</i>	<i>35</i>
<i>Figura 24. Sistema de Foliot.....</i>	<i>37</i>
<i>Figura 25. Escapament Verge amb pèndol.....</i>	<i>38</i>
<i>Figura 26. Volant d'inèrcia balancejat.....</i>	<i>39</i>
<i>Figura 27. Acoblament final del rellotge.....</i>	<i>41</i>
<i>Figura 28. Xassís posterior.....</i>	<i>42</i>
<i>Figura 29. Xassís davanter.....</i>	<i>42</i>
<i>Figura 30. Parts del sistema molla.....</i>	<i>43</i>
<i>Figura 31. Muntatge conjunt molla-barrilet.....</i>	<i>43</i>
<i>Figura 32. Muntatge barrilet - engranatge.....</i>	<i>44</i>
<i>Figura 33. Conjunt cadell.....</i>	<i>44</i>
<i>Figura 34. Secció de l'eix del conjunt molla.....</i>	<i>45</i>
<i>Figura 35. Tren d'engranatges del rellotge.....</i>	<i>46</i>
<i>Figura 36. Secció eix principal rellotge.....</i>	<i>47</i>
<i>Figura 37. Muntatge planetes.....</i>	<i>47</i>
<i>Figura 39. Elements del volant d'inèrcia.....</i>	<i>48</i>
<i>Figura 40. Secció de l'eix del volant d'inèrcia.....</i>	<i>49</i>
<i>Figura 41. Espiral d'Arquímedes.....</i>	<i>52</i>
<i>Figura 42. Geometria de la molla dins el barrilet.....</i>	<i>54</i>
<i>Figura 43. Diagrama de sòlid lliure de la molla.....</i>	<i>55</i>
<i>Figura 44. Curvatura de la molla sense deformació inicial.....</i>	<i>56</i>
<i>Figura 45. Cicle d'histèresi de la molla.....</i>	<i>57</i>
<i>Figura 46. Curvatura de la molla amb deformació inicial.....</i>	<i>58</i>
<i>Figura 47. Primera etapa del tren d'engranatges.....</i>	<i>61</i>
<i>Figura 48. Segona etapa del tren d'engranatges.....</i>	<i>62</i>

<i>Figura 49. Tercera etapa del tren d'engranatges.....</i>	<i>63</i>
<i>Figura 50. Paràmetres entre volant d'inèrcia i àncora.....</i>	<i>64</i>
<i>Figura 51. Paràmetres entre àncora i catalina. Palet d'entrada.....</i>	<i>64</i>
<i>Figura 52. Paràmetres entre àncora i catalina. Palet de sortida.....</i>	<i>65</i>
<i>Figura 53. Elements del sistema escapament: catalina (rosa), àncora (gris) i volant d'inèrcia (vermell).....</i>	<i>68</i>
<i>Figura 54. Relació geomètrica entre l'àncora i el volant d'inèrcia.....</i>	<i>69</i>
<i>Figura 55. Relació geomètrica entre l'àncora i la catalina. Palet d'entrada.....</i>	<i>70</i>
<i>Figura 56. Relació geomètrica entre l'àncora i la catalina. Palet de sortida.....</i>	<i>71</i>
<i>Figura 57. Esquema de la direcció dels angles de l'escapament.....</i>	<i>73</i>
<i>Figura 58. Diagrama de les forces de contacte entre l'àncora i el volant d'inèrcia.....</i>	<i>74</i>
<i>Figura 59. Diagrama de les forces de contacte entre la catalina i l'àncora.....</i>	<i>77</i>
<i>Figura 60. Estructura de la simulació per la Fase 4 i la Fase 10.....</i>	<i>83</i>
<i>Figura 61. Diagrama de blocs del balanceig lliure.....</i>	<i>83</i>
<i>Figura 62. Diagrama de blocs de la Fase 4.....</i>	<i>84</i>
<i>Figura 63. Diagrama de blocs de la Fase 10.....</i>	<i>85</i>
<i>Figura 64. Estudi de Cuboyo de la petjada de carboni de la impressió 3D.....</i>	<i>95</i>
<i>Figura 65. Escapament català.....</i>	<i>100</i>



## 2. Llistat de taules

<i>Taula 1. Proporcions entre palets i dents d'un escapament suís.....</i>	<i>36</i>
<i>Taula 2. Llista dels components normalitzats del rellotge.....</i>	<i>51</i>
<i>Taula 3. Reduccions del tren d'engranatges.....</i>	<i>63</i>
<i>Taula 4. Valors dels paràmetres de l'escapament.....</i>	<i>65</i>
<i>Taula 5. Resum de les equacions de moviment en cada fase.....</i>	<i>80</i>
<i>Taula 6. Planificació general del projecte.....</i>	<i>89</i>
<i>Taula 7. Cost de recursos humans.....</i>	<i>91</i>
<i>Taula 8. Costos secundaris de la fase de disseny.....</i>	<i>91</i>
<i>Taula 9. Cost dels components fabricats en FDM.....</i>	<i>93</i>
<i>Taula 10. Cost dels components comercials del prototip.....</i>	<i>94</i>
<i>Taula 11. Càlcul d'emissions de CO2 del projecte.....</i>	<i>97</i>

### 3. Llistat de gràfics

<i>Gràfic 1. Parell vs. voltes d'una molla a torsió estàndard .....</i>	<i>19</i>
<i>Gràfic 2. Parell vs. Angle. Zona amb parell constant. ....</i>	<i>21</i>
<i>Gràfic 3. Parell vs. Angle. Barrilet amb molla modern.....</i>	<i>22</i>
<i>Gràfic 4. Eficiència vs l'angle entre <math>F_{c1}</math> i <math>F_i</math>.....</i>	<i>29</i>
<i>Gràfic 5. Parell vs. Destensió de la molla.....</i>	<i>60</i>
<i>Gràfic 6. Angle <math>\theta</math> vs. Temps durant un cicle del model.....</i>	<i>86</i>
<i>Gràfic 7. Transformada de Fourier de la senyal <math>\theta</math>.....</i>	<i>86</i>
<i>Gràfic 8. Simulació de l'evolució de l'angle <math>\theta</math>.....</i>	<i>87</i>
<i>Gràfic 9. Simulació de l'evolució de la velocitat angular <math>\beta</math> .....</i>	<i>88</i>
<i>Gràfic 10. Simulació de l'evolució de l'acceleració angular <math>\beta</math> .....</i>	<i>88</i>



## 4. Prefaci

En el document que es presenta es realitza una primera etapa de l'avantprojecte mecànic d'un rellotge de sobretaula o paret en la que la transmissió es realitza mitjançant trens epicicloïdals. En el desenvolupament d'aquest treball s'aprofundeix en l'estudi dinàmic del mecanisme d'escapament i el seu sistema oscil·lant.

### 4.1. Origen del projecte

La ciència de mesurar el temps es remunta a la cultura egípcia i als seus rellotges solars, on grans obeliscs seguien el moviment del sol. El rellotge d'aigua, que data del segle XVI a.C, s'usava a Babilònia, Egipte i Xina i, de la mateixa manera que el rellotge de sorra, usava el flux constant de matèria sortint o entrant en un altre recipient per mesurar el temps.

El rellotge d'espelma, basat en la regularitat del cremar (generalment cera) de les espelmes enceses, era molt usat en l'antiguitat en els convents i monestirs europeus per poder fer les vigílies.

Els primers rellotges mecànics (amb escapament de Verge i un oscil·lador de Foliot) es van inventar a Europa a principis del segle XIV, i van esdevenir un estàndard per a mesurar el temps fins a la invenció del rellotge amb pèndol l'any 1656. La incorporació de molles al disseny de rellotges que es va fer al segle XV va permetre crear rellotges portàtils, desembocant en els rellotges de butxaca del segle XVII. Aquests rellotges es van millorar gràcies a la incorporació de molles al volant d'inèrcia a mitjans del mateix segle.

Els rellotges de pèndol van romandre com el dispositiu més acurat per mesurar el temps fins al 1930, quan l'oscil·lador de quars va ser inventat, seguit pel rellotge atòmic al 1955.

### 4.2. Motivació

La motivació per a realitzar aquest projecte ve d'un interès molt personal de l'autora per la rellotgeria. En el seu àmbit personal sempre ha tingut contacte amb tot tipus de rellotges: rellotges de sol, de rateta, de sobretaula,...

Se li suma el coneixement adquirit d'haver estudiat una enginyeria i voler anar un pas més enllà i "calcular" un rellotge: donar una visió més profunda de tota la mecànica que s'amaga sota un dispositiu tan habitual com és un rellotge, i fer-ne també un disseny propi.



## 5. Introducció

### 5.1. Objectius del projecte

Objectiu principal:

- Realitzar l'avantprojecte del mecanisme d'un rellotge de paret amb tren epicicloïdal.

Objectius secundaris:

- Enfocar el predisseny dels seus components a la fabricació en impressió 3D per filament, per facilitar la pròpia fabricació i muntatge.
- Ampliar coneixements del programari MATLAB – SIMULINK.

### 5.2. Abast del projecte

L'avantprojecte inclou:

- Estudi de l'estat de l'art de tipus de sistemes de transmissió i sistemes d'emmagatzematge d'energia en rellotges. Estat de l'art de tipus d'oscil·ladors (pèndol, volant balancejat,...) i tipus de mecanismes d'escapament.
- El predisseny dels components no implica disseny en detall i per tant no es fan els plànols d'aquests.
- Estudi cinemàtic del tren epicicloïdal i dimensionat del mateix.
- Simulació dinàmica del conjunt "volant d'inèrcia – escapament – catalina" i dimensionat del mateix.





## 6. Estat de l'art dels mecanismes que configuren els rellotges de paret

Un mecanisme de rellotgeria mecànic es compon de tres elements mínims: un motor, un tren d'engranatges i un oscil·lador (Figura 1).

El motor sol ser una molla o un pes que acumula l'energia necessària per fer moure el mecanisme. A aquesta molla o pes se li ha de donar energia de forma periòdica, anomenant aquest procés "donar corda" al rellotge. En un rellotge de paret la freqüència en la que s'ha de donar corda acostuma a variar entre cada 24h i 72h.

El motor transmet l'energia emmagatzemada al tren d'engranatges, que descompon aquesta energia acumulada. Als eixos dels engranatges hi aniran unides les agulles del rellotge de forma solidària, per tal de poder consultar l'hora des de l'exterior del mecanisme.

L'oscil·lador o regulador s'ocupa de dosificar l'energia alliberada pel motor. Si no existís l'oscil·lador i l'escapament encarregat d'unir-lo amb la resta del tren d'engranatges, tota l'energia acumulada es descarregaria sense control. L'oscil·lador funciona de manera alterna (normalment mitjançant un gir) i acciona l'escapament, que a continuació allibera el tren d'engranatges perquè avanci una dent en cada moviment. Aquest mecanisme (oscil·lador i escapament) és el que produeix el característic so de tots els rellotges mecànics.

El funcionament d'un rellotge mecànic està sotmès al fregament de totes les seves peces, al desgast de les mateixes, a la pèrdua de lubricació i a les variacions de temperatura i humitat, problemes que pateixen en menor mesura els rellotges de quars, basats en tecnologia electrònica.

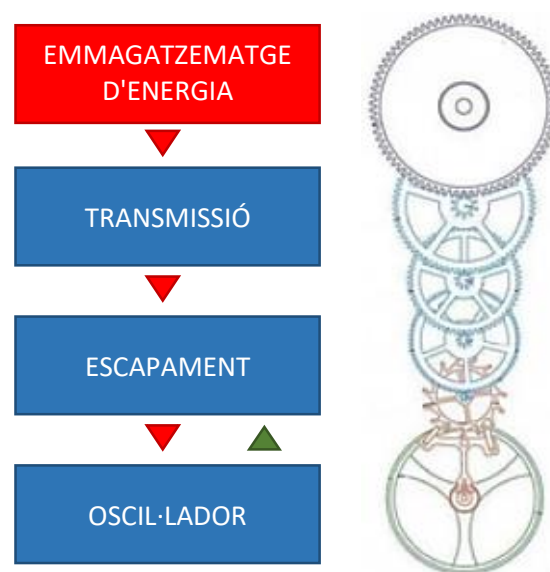


Figura 1. Esquema d'un mecanisme de rellotgeria

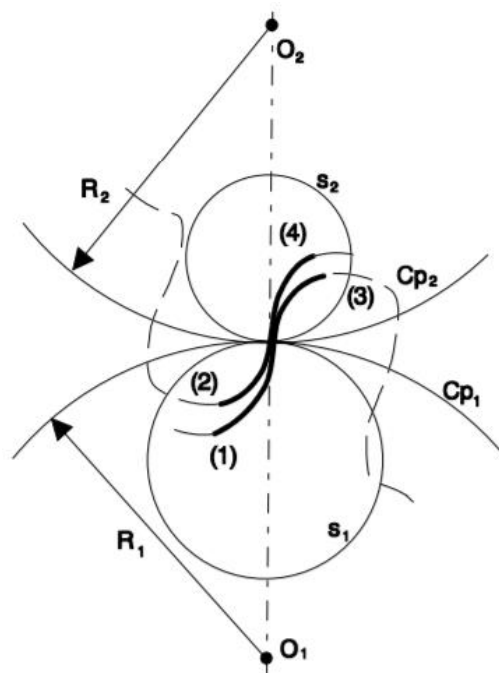
## 6.1. Sistemes de transmissió

Habitualment el sistema de transmissió d'un rellotge de paret és un tren d'engranatges d'eixos paral·lels. Tot i que actualment la major part d'engranatges usats en la indústria tenen un perfil de dent d'evolvent, en el cas de la rellotgeria està altament estès usar el perfil cicloïdal.

### 6.1.1. Perfil cicloïdal

Fa aproximadament un segle, el perfil cicloïdal tenia una gran difusió gràcies a la facilitat per reproduir engranatges cicloïdals per fosa. Tot i així, en la actualitat només es fan servir en mecanismes especials com els de rellotgeria.

El cap de la dent de perfil cicloïdal està traçada per una epicloide i el peu per una hipocicloide [1]. En aquest engranatges el perfil convex contacta amb el còncav, fent així que la pressió específica d'aquest tipus de contacte sigui menor que quan estan en contacte dos perfils convexos. Això mateix, però, els fa ser molt sensibles a la variació en la distància entre eixos.



*Figura 2. Perfil cicloïdal*

A la vegada, la velocitat de lliscament que hi ha entre dos dents d'aquest tipus és constant en cada una de les zones de la dent, i significativament menor que en el cas dels engranatges amb perfil d'evolvent. Això fa que el desgast de la dent també sigui inferior. No obstant, en el punt del perfil



situat sobre la circumferència primitiva (la frontera entre el perfil còncav i convex) es produeix un canvi brusc de la velocitat de lliscament i, com a conseqüència, el trencament superficial del material al voltant d'aquest punt és més probable en un engranatge cicloïdal que en un d'evolvent.

Finalment, la línia d'engranament no resulta ser una línia recta (Figura 2): l'angle de pressió és variable. Per tant, varien tant les magnituds de les forces de reacció als coixinets com la orientació d'aquestes reaccions. A la vegada, al ser el desgast de la dent proporcional a la força de pressió, el desgast de la dent és desigual.

### 6.1.2. Perfil d'evolvent de cercle

L'evolvent de cercle és una corba tal que el lloc geomètric dels centres de curvatura de tots els seus punts formen una circumferència [2].

Una de les principals característiques del perfil d'evolvent és que la línia d'engranament és una recta (Figura 3). La línia d'engranament és el lloc geomètric dels punts de contacte entre els perfils conjugats. En el cas del perfil d'evolvent la línia d'engranament és la tangent comú dels cercles base dels dos perfils. Aquesta línia marca la direcció de transmissió de les forces. L'angle de pressió en aquest cas és constant, cosa que resulta beneficiós des d'un punt de vista dinàmic. A més, en el perfil evolvent poden estar en contacte dos o més parells de dents, suportant l'esforç a transmetre conjuntament.

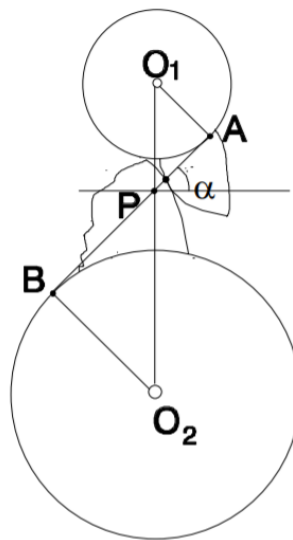


Figura 3. Perfil d'evolvent

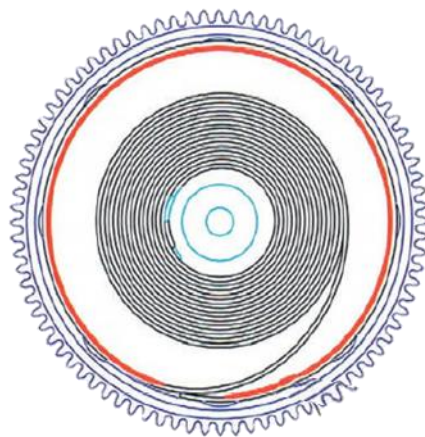
Per altra banda, els perfils d'evolvent engranen encara que hi hagi variacions en la distància entre centres. Al modificar la distància entre centres, els perfils segueixen engranant, fent variar només l'angle de pressió.

## 6.2. Sistemes d'emmagatzematge d'energia

El sistema d'emmagatzematge d'energia d'un rellotge s'ocupa de proporcionar al sistema oscil·lant l'energia necessària per tal que el rellotge funcioni, a través del tren d'engranatges i l'escapament. En el cas dels rellotges de paret clàssics acostuma a tractar-se d'un sistema mecànic que acumula energia potencial. Tant pot tractar-se d'un pes penjat d'un fil que l'usuari del rellotge enroscarà en un eix, o d'una molla que l'usuari tensarà.

### 6.2.1. Barrilet i molla

El barrilet és l'encapsulat de la molla, i rep l'energia d'aquesta i engrana amb el tren d'engranatges del rellotge. Tal i com es pot veure a la Figura 4, el barril és un tambor o caixa cilíndrica de metall o fusta tancada mitjançant una tapa i rodejada per un anell dentat, en el qual s'hi allotja la molla en espiral, denominada molla real o corda. La molla acostuma a subjectar-se al barrilet per l'extrem exterior de l'espira i a l'eix que travessa a ambdós per l'extrem interior.



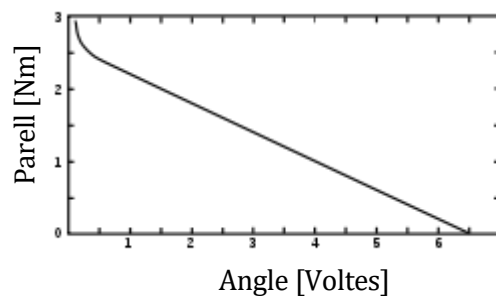
*Figura 4. Barril i molla*

El barril i la molla són elements importants en el disseny d'un rellotge. La relació entre els diàmetres del barril i el pinyó central té una estreta relació amb la llargada i rigidesa de la molla, i s'ha de calcular si s'espera que el rellotge funcioni correctament i durant un nombre determinat d'hores.

Per calcular el nombre d'hores que un rellotge funcionarà, primer s'ha de determinar la relació entre el nombre de voltes del pinyó central i el nombre de voltes del barril, i seguidament determinar en quantes voltes de barril la molla deixa de donar el parell requerit pel funcionament del tren d'engranatges. Això s'estudia en més detall a l'apartat 7.



El problema principal de l'emmagatzemament d'energia en molla és que el parell que dona la molla no és constant, sinó que va disminuint a mida que es desenrosca (Gràfic 1). Un rellotge ha de moure's a un ritme constant per tal de mantenir la precisió en la mesura del temps, i tot i que un rellotge mai és totalment isòcron, els rellotges primitius de Verge i Foliot es veien molt afectats per la disminució de parell de la molla, i anaven reduint el ritme a mida que la molla s'anava desenroscant.



Gràfic 1. Parell vs. voltes d'una molla a torsió estàndard

Per tal de minimitzar aquest fenomen, van aparèixer diverses solucions [3].

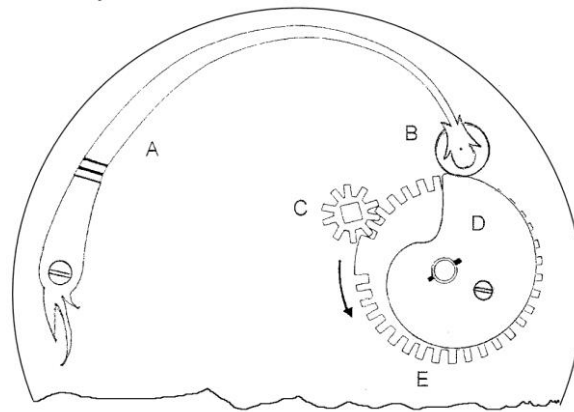
#### 6.2.1.1. Lleva reguladora (*stackfreed*)

La primera solució que va aparèixer a la caiguda de parell de la molla va ser l'anomenada lleva reguladora. Va ser utilitzat principalment durant els segles XVI i XVII, abans de ser substituït pel cargol.

És un mecanisme primitiu que es val d'una lleva accionada per un ressort de força variable per regular per fregament la força transmesa de la molla a la maquinària del rellotge, amb l'objectiu de millorar la seva exactitud. S'usava principalment en rellotges de butxaca alemanys abans de ser substituït pel cargol en models posteriors.

El mecanisme es compon, tal i com es mostra a la Figura 5, d'un braç de molla rígida (A) dotat d'un rodets al seu extrem (B), que pressiona sobre una lleva amb un sector excèntric (D). Aquesta lleva està unida a un engranatge (E), accionat directament per l'arbre del ressort principal mitjançant una roda dentada (C).

La força del braç pressionant sobre la lleva permet reduir el parell motor de la molla principal, reducció regulada per la distància variable del radi de la lleva. Quan la molla està totalment tensada, el braç pressiona contra la part més ampla de la lleva, fent que el moment de retenció sigui màxim. Quan la corda del rellotge es va esgotant i la molla es va desenroscant, la lleva va rotant i el rodets pressiona cada vegada amb menys força reguladora, compensant així la força decreixent de la molla.



*Figura 5. Mecanisme lleva reguladora*

La lleva reguladora és un dispositiu molt ineficient. Com que funciona exercint una força de fricció oposada a la molla, això obliga a dissenyar molles més potents, que a la vegada suposa una variació més gran de la força subministrada al rellotge.

#### **6.2.1.2. Cargol**

La segona solució que es va proposar va ser la del cargol (a vegades denominat "fusée"). Aquesta solució es va utilitzar des del segle XVII fins a principis del segle XX.

Consisteix en una politja en forma troncocònica amb un rebaix helicoidal al seu voltant on s'hi enrotlla un cordó o cadena. L'extrem de la cadena està subjectat al barrilet que allotja la molla principal. La força de la molla fa girar el barrilet, que a la vegada fa girar el cargol al estirar la cadena. Finalment el cargol és l'encarregat d'impulsar el tren d'engranatges del rellotge.

Quan la molla està tensada (Figura 6), tota la cadena està enrotllada al voltant del cargol de baix cap amunt, i l'extrem que va al barrilet surt de la part superior. D'aquesta forma, la màxima tracció corresponent a la molla tensada s'aplica a la zona del cargol amb menor diàmetre, per la qual cosa el moment al cargol queda reduït pel mínim radi. A mida que la molla es va destensant (Figura 7), la cadena es va desenroscant i ocupant les zones del cargol amb major diàmetre, fent que el moment proporcionat pel radi més gran del cargol compensi la pèrdua de força de la molla.





Figura 6. Mecanisme de cargol. Molla tensada

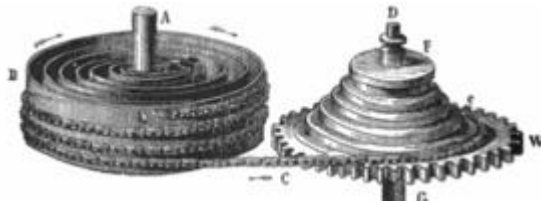
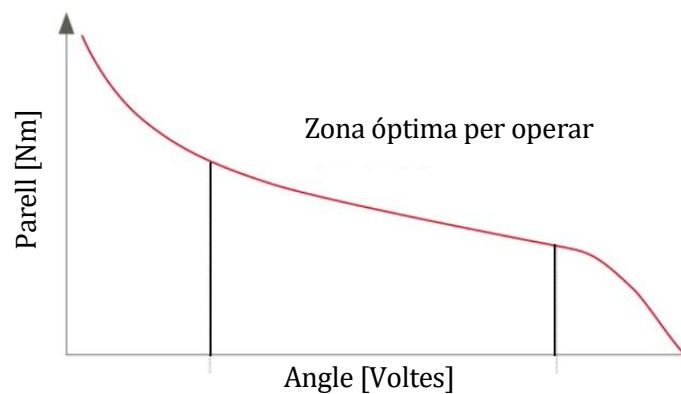


Figura 7. Mecanisme de cargol. Molla destensada

El cargol és un bon compensador de la molla, però també és car, difícil d'ajustar i té diversos inconvenients com el volum que ocupa i els problemes generats per la cadena quan es trenca.

#### 6.2.1.3. Aturador (*Stop work*)

Un altre dispositiu proposat per a la reducció en la variació de la força de la molla és l'anomenat "aturador". Aquest mecanisme prevé a la molla de ser tensada totalment i destensada totalment, aprofitant només la zona de la corba de parell més constant (Gràfic 2). Actualment aquest sistema ja no s'usa, gràcies a les millores que s'han fet en els barrils i molles actuals.



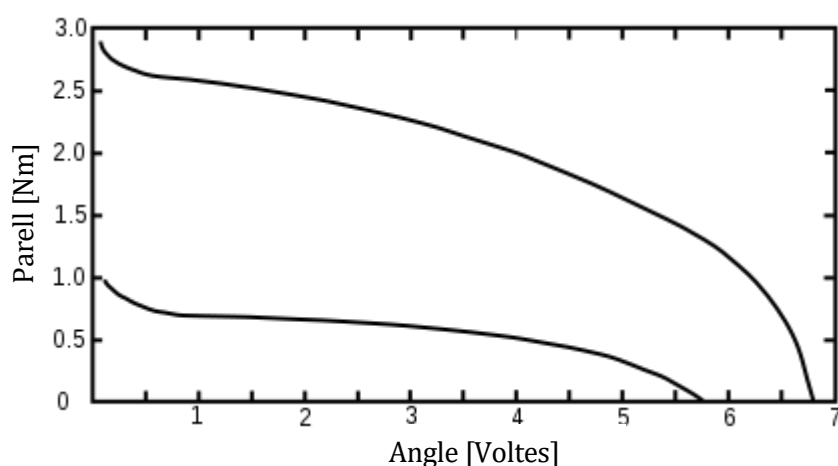
Gràfic 2. Parell vs. Angle. Zona amb parell constant.

#### 6.2.1.4. Remuntador (*Remontoire*)

El quart dispositiu usat per millorar la precisió del rellotge amb molla és el remuntador. És un petit sistema secundari (normalment una molla), que alimenta l'escapament del rellotge. Aquesta molla secundària utilitza l'energia de la molla principal per a re enroscar-se periòdicament, aïllant l'escapament del parell variant de la molla principal [4]. Aquest sistema va aparèixer al voltant del 1600 i a poc a poc va anar quedant obsolet; actualment no s'usa pràcticament gens.

#### 6.2.1.5. Barrilet amb molla modern

El barril amb molla modern, produeix una força constant simplement usant una molla més llarga del necessari, i collant-la amb tensió dins del barril. En funcionament, només unes quantes voltes de la molla s'estan usant simultàniament, amb la resta de voltes pressionades contra la paret exterior del barril. Matemàticament, la tensió crea una secció plana en la corba del parell (Gràfic 3), i només aquesta secció és usada. A més a més, el final de la molla acostuma a tenir una corba en sentit contrari (la molla té forma de S) que emmagatzema més tensió en les voltes exteriors de la molla, i s'usa quan la molla està pràcticament destensada.



Gràfic 3. Parell vs. Angle. Barrilet amb molla modern





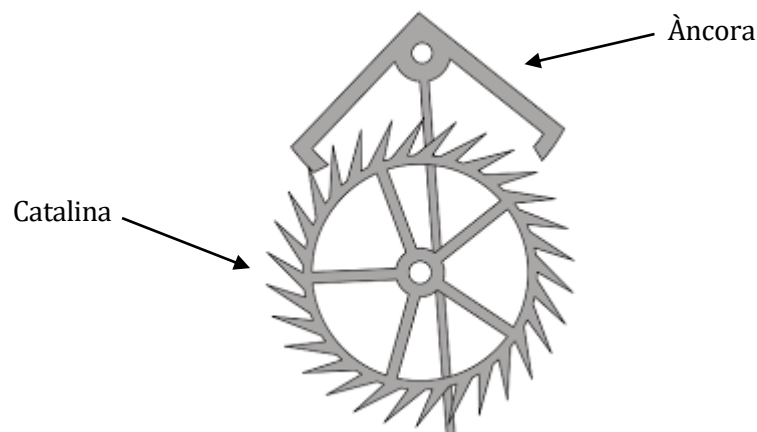
## 6.3. Mecanisme d'escapament

En el disseny d'un rellotge de paret s'ha de prestar especial atenció al sistema d'escapament escollit, ja que d'aquest sistema en depèn l'eficiència de tot el rellotge.

Els tipus d'escapaments que es troben més sovint en rellotges de paret són el tipus "Graham", el "Recoil", el "Brocot" i el "Swiss Lever". Tots aquests tipus d'escapament tenen eficiències per sota del 50%, el que significa que més de la meitat de l'energia es perd només en el sistema de l'escapament, després de totes les pèrdues que ja hi ha hagut en el tren d'engranatges.

### 6.3.1. Elements d'un sistema d'escapament

Un sistema d'escapament està compost per dos elements principals: l'àncora i la catalina tal i com es mostra a la Figura 8. L'àncora té dos braços, el d'entrada i el de sortida, i al final dels braços s'hi troben els anomenats palet d'entrada i sortida respectivament. Per altra banda, la catalina és la roda dentada en contacte amb aquests palets.



*Figura 8. Sistema d'escapament Graham*

La funció principal de l'àncora és transmetre l'energia que rep de la catalina a l'element oscil·lador, per tal de mantenir aquest amb energia suficient per continuar oscil·lant. Per altra banda, l'àncora marca el ritme d'avanç de la catalina. Sense l'àncora, tot el mecanisme del rellotge giraria sense aturador fins a esgotar l'energia emmagatzemada al pes o molla.

Aquesta energia es transmet a través del contacte entre les dents de la catalina i els palets de l'àncora. És molt important parlar atenció a la geometria d'ambdós, per assegurar que es perdrà la mínima energia en el contacte i a la vegada s'evitarà que les dues peces encallin.

Cada palet, tant el d'entrada com el de sortida, té una cara de bloqueig i una cara d'impuls. La cara de bloqueig és aquella que entra en contacte amb la dent de la catalina per impedir que aquesta

avanci una posició. La cara d'impuls és aquella per on passa la dent de la catalina un cop és alliberada, i la cara per on es transmet energia de la dent de la catalina cap a l'àncora.

En la Figura 9, el palet d'entrada és aquell envoltat per les lletres A, F i G, i el palet de sortida és aquell envoltat per les lletres B, D i E. En el cas del palet d'entrada, la cara de bloqueig és l'aresta entre F i G, i la cara d'impuls és l'aresta entre F i A. A l'altre extrem de l'àncora, en el palet de sortida, la cara de bloqueig és l'aresta entre B i D i la cara d'impuls l'aresta entre B i E.



Figura 9. Escapament Graham. Palet d'entrada i palet de sortida

### 6.3.2. Funcionament d'un sistema d'escapament

Un sistema d'escapament té quatre estats possibles, que es van repetint en llaç a cada cicle d'oscil·lació del sistema d'oscil·lació.

- Bloqueig de la catalina a la paleta de sortida. Contacte entre dent de la catalina i la cara de bloqueig de la paleta de sortida.

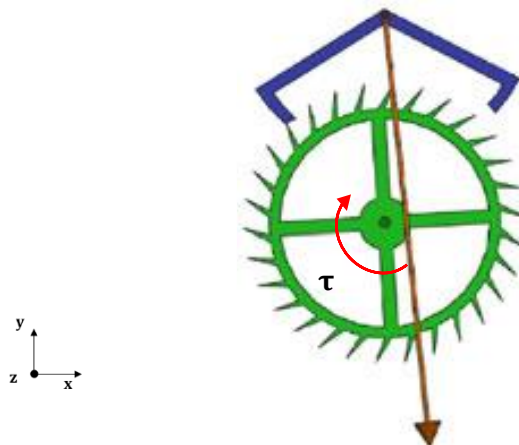


Figura 10. Funcionament d'un sistema d'escapament. Etapa 1



- Alliberament de la catalina. Transmissió d'energia. Contacte entre dent de la catalina i la cara d'impuls de la paleta de sortida. En el cas de que la catalina estigui girant en sentit horari, l'àncora ho fa també en sentit horari.

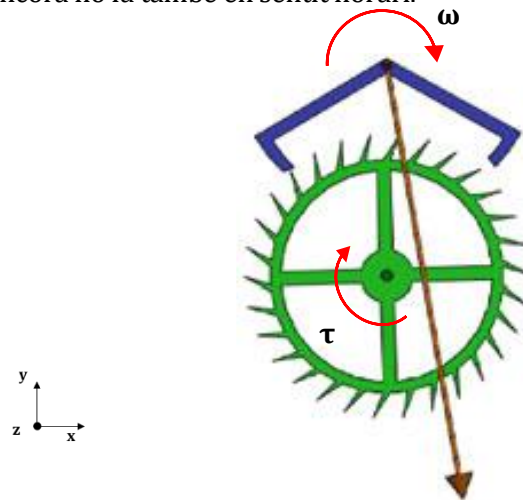


Figura 11. Funcionament d'un sistema d'escapament. Etapa 2

- Bloqueig de la catalina a la paleta d'entrada. Contacte entre dent de la catalina i la cara de bloqueig de la paleta d'entrada.

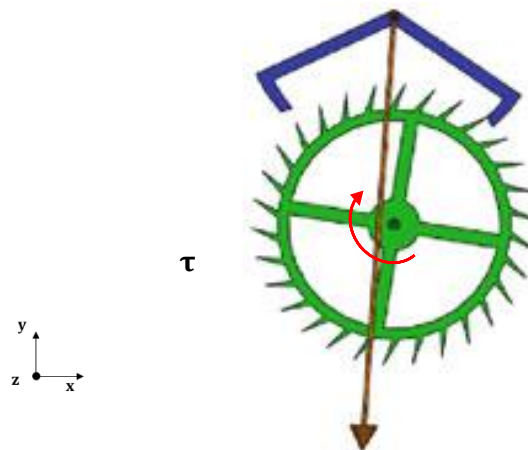


Figura 12. Funcionament d'un sistema d'escapament. Etapa 3

- Alliberament de la catalina. Transmissió d'energia. Contacte entre dent de la catalina i la cara d'impuls de la paleta d'entrada. En el cas de que la catalina estigui girant en sentit horari, l'àncora ho fa en sentit antihorari.

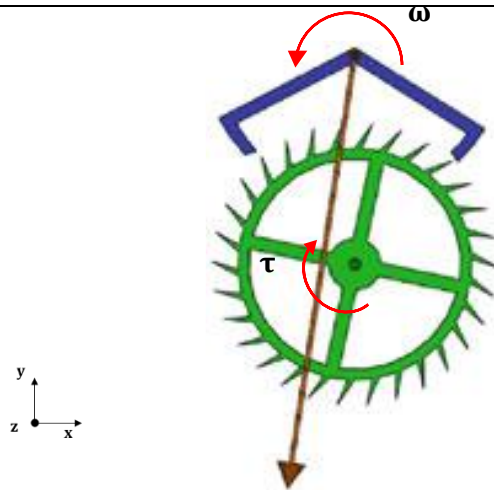


Figura 13. Funcionament d'un sistema d'escapament. Etapa 4

### 6.3.3. Eficiència i pèrdua d'energia

El motiu més habitual de mal funcionament d'un rellotge és que aquest s'atura perquè l'energia corresponent a les resistències passives és superior a l'energia entregada al sistema d'oscil·lació (pèndol o volant). Una forma de mantenir el sistema d'oscil·lació en marxa seria augmentar l'energia emmagatzemada (afegint més pes o tensant més la molla), però aquesta mesura implica grans càrregues als eixos de les rodes dentades i un dany al rellotge a llarg termini. L'altra forma de mantenir-lo en marxa és reduir al màxim les pèrdues d'energia del rellotge: netejar el rellotge, polir els eixos, reemplaçar els coixinets, lubricar-lo o millorar el disseny del sistema d'escapament.

#### 6.3.3.1. Angle de la cara d'impuls dels palets d'entrada i sortida

Per tal que les pèrdues d'energia en el sistema d'escapament siguin les mínimes possibles, s'ha de buscar un angle de contacte entre les dents de la catalina i les cares d'impuls dels palets durant l'alliberament de la catalina que maximitzi la força que la dent exerceix sobre el palet.

La dent de la catalina exerceix una força ( $F_i$ ) contra la cara del palet en la direcció normal a la superfície d'aquesta cara, tal i com es representa a la Figura 14. Aquesta força es pot desglossar en dues forces perpendiculars a les línies que uneixen el punt de contacte amb l'eix de la catalina i l'àncora, respectivament (Figura 15).



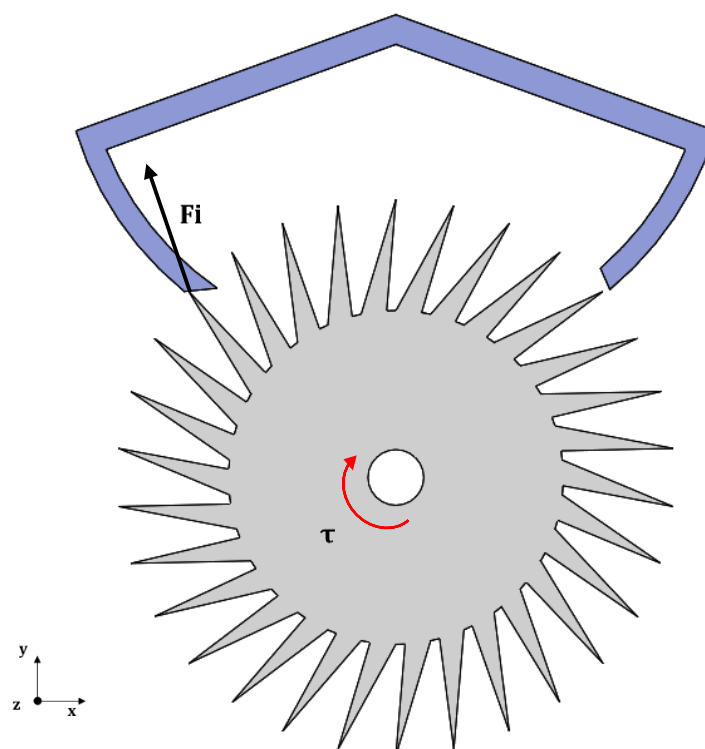


Figura 14. Força exercida per la dent de la catalina sobre l'àncora

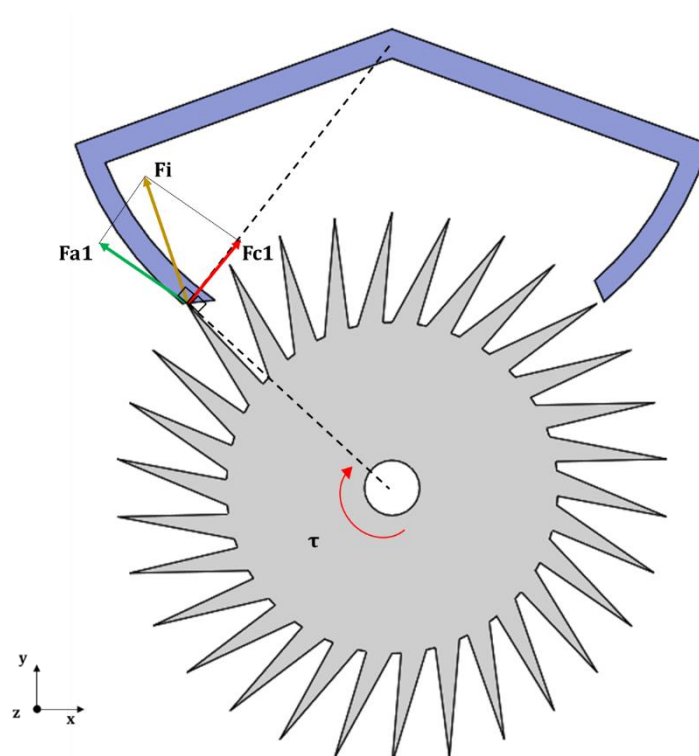


Figura 15. Esquema de forces que exerceix la dent de la catalina sobre el palet de sortida d'un escapament Graham

Es defineix l'angle  $\alpha$  com l'angle entre la direcció de la força  $F_{c1}$  i la cara del palet de l'ancora (Figura 16). Es pot veure que si aquest angle és de  $90^\circ$  la catalina i l'ancora quedaran encallats (la cara de bloqueig del palet coincidiria amb la cara d'impuls del mateix). I si aquest angle és de  $0^\circ$ , la catalina passarà sense esforç i sense transmetre energia (considerant la força de fregament entre els dos cossos negligible). Per tant, no hi ha transmissió d'energia si l'angle  $\alpha$  és de  $0^\circ$  o de  $90^\circ$ .

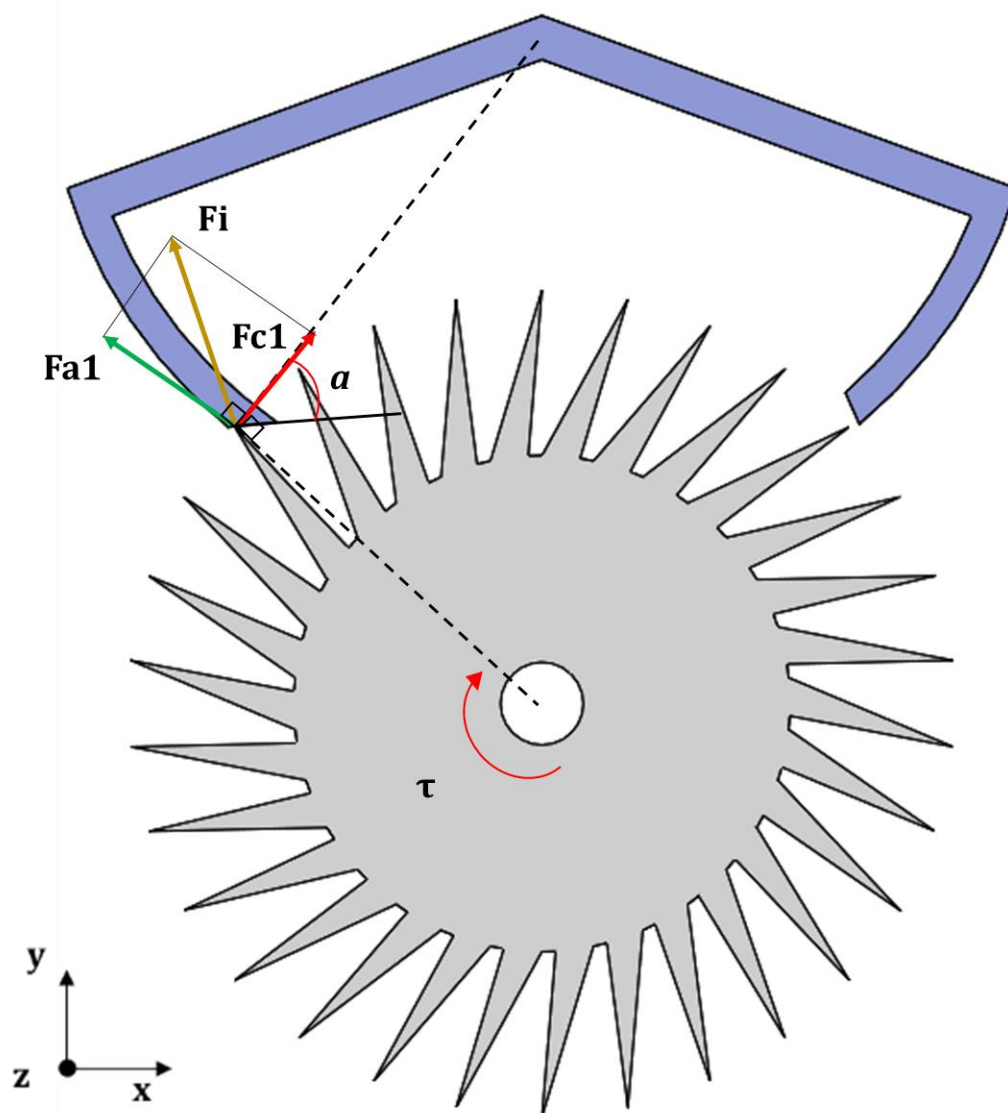


Figura 16. Angle  $\alpha$ , angle entre la direcció de la força  $F_{c1}$  i la cara del palet de l'ancora



Si es calcula la transferència d'energia que hi ha per a tots els valors de l'angle  $a$  s'obté el Gràfic 4, que indica que l'angle òptim entre la trajectoria de la dent de la catalina i la cara d'impuls del palet per minimitzar les pèrdues d'energia és de  $45^\circ$ . Si l'angle és de  $45^\circ$ , l'eficiència teòrica serà d'un 50%. En el Gràfic 4, seguint la següent expressió, es pot veure l'evolució entre l'angle i l'eficiència en la transferència d'energia:

$$Ef[\%] = \cos(b) \cdot \cos(c) \cdot 100 \quad (Eq. 1)$$

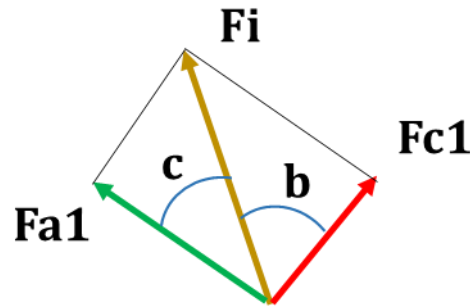
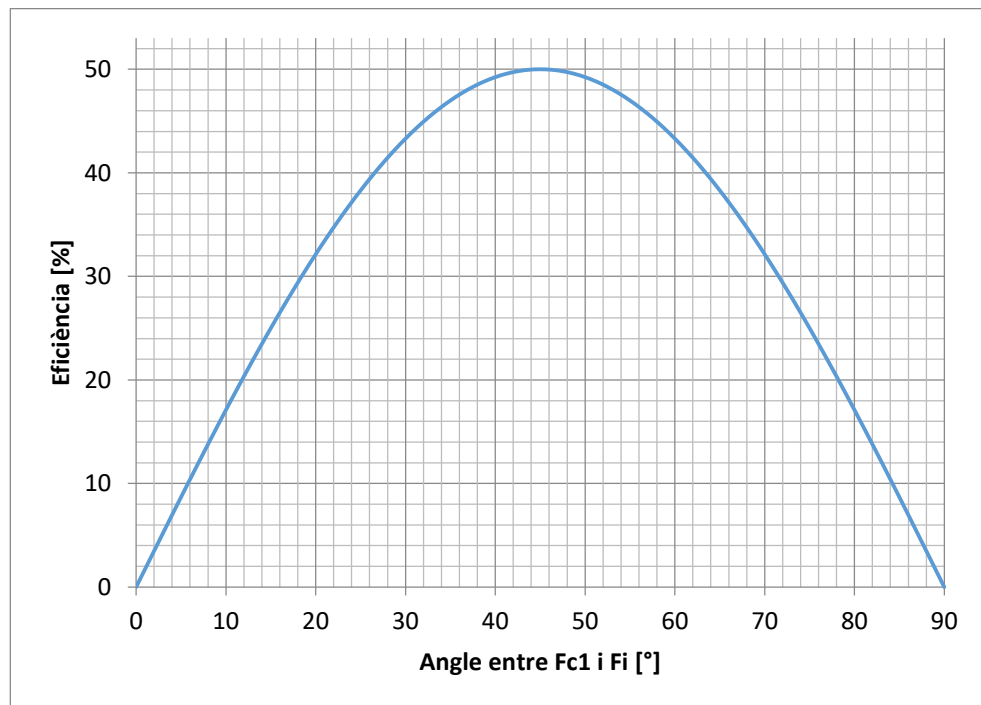


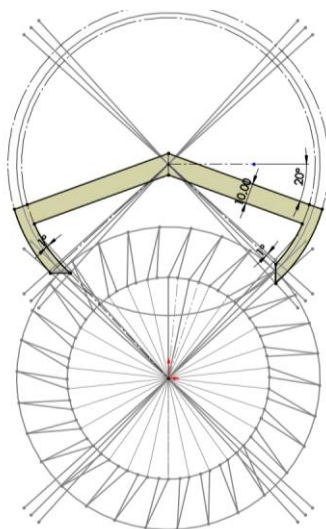
Figura 17. Còpia de l'esquema de forces que exerceix la dent de la catalina sobre el palet d'entrada



Gràfic 4. Eficiència vs l'angle entre Fc1 i Fi

Si s'observa la distribució de forces de la Figura 15 i extrapolant aquesta distribució al palet de sortida de l'àncora, es pot intuir que el palet d'entrada tindrà la cara d'impuls en posició horitzontal, i el palet de sortida tindrà la cara d'impuls en posició vertical.

A la Figura 18 es pot veure com queda un exemple de disseny d'escapament Graham:

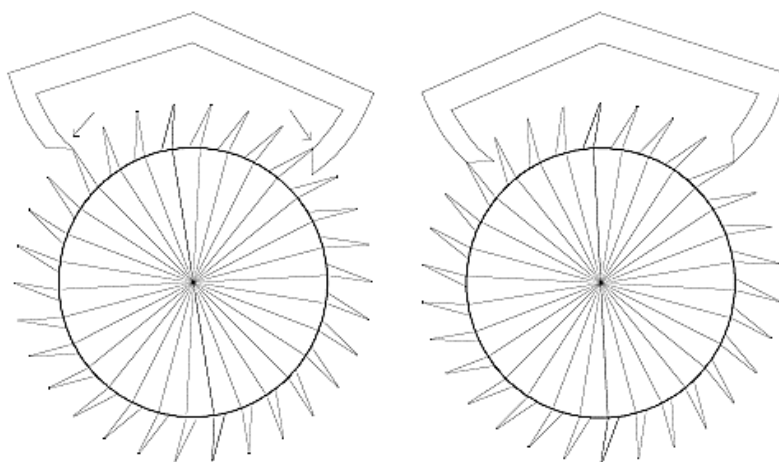


*Figura 18. Escapament Graham*

#### 6.3.3.2. Marge interior i exterior (*Inside i outside drop*)

Com s'ha comentat anteriorment, es calcula l'angle de la cara d'impuls del palet per tal de maximitzar la força transmesa, però també s'ha de fer el disseny tenint en compte que la catalina i l'àncora mai puguin encallar.

Si es dissenya el sistema d'escapament amb la cara d'impuls del palet d'entrada en posició horitzontal i amb la cara d'impuls del palet de sortida en posició vertical es donaran les situacions representades en la Figura 19.



*Figura 19. Marge interior i exterior (Inside i outside drop)*





Com es pot veure, la catalina queda encallada perquè no hi ha cap marge a l'interior ni a l'exterior dels palets, fent que les dents de la catalina impactin contra les cares d'impuls dels palets i hi hagi retrocés. Per tal d'evitar-ho, les cares d'impuls dels palets s'han de dissenyar més primes del previst inicialment, fent que es redueixi l'eficiència màxima teòrica trobada anteriorment. L'experiència indica que amb  $1^\circ$  de desviació en cada palet és suficient. Tenint en compte aquesta nova desviació es perd un 16% d'eficiència, tal i com s'explica en detall a l'apartat 6.3.3.3.

### 6.3.3.3. Nombre de dents de la catalina

Una altra forma de millorar l'eficiència de l'escapament és reduir el nombre de dents de la catalina. Fins ara s'ha considerat una catalina de 30 dents, ja que en els rellotges clàssics de paret s'acostuma a trobar un pèndol d'un metre que fa una pulsació cada segon (sent la catalina de 30 dents, la forma més simple de calcular el tren d'engranatges del rellotge). Però si es redueix el nombre de dents d'aquesta, tenint en compte que és necessari deixar marge, l'eficiència millora respecte la catalina de 30 dents.

En una catalina de 30 dents, una dent avança en cada pulsació  $6^\circ$  ( $360^\circ / (30 \text{ dents} \cdot 2 \text{ paletes})$ ), i idealment està en contacte amb la cara d'impuls d'una paleta els  $6^\circ$ . En cada grau d'aquest contacte la dent haurà fet una sisena part del treball total (que el podem considerar d'1). En canvi, en el cas real, restem un d'aquests graus a causa del marge, i per tant la dent només transmet energia en  $5^\circ$  en comptes de fer-ho en  $6^\circ$ . Per tant, en aquest cas el treball només serà de  $1 \cdot 5 / 6 = 0,833$ . D'aquí podem deduir que l'eficiència que perdem respecte el cas ideal és del 16,6%.

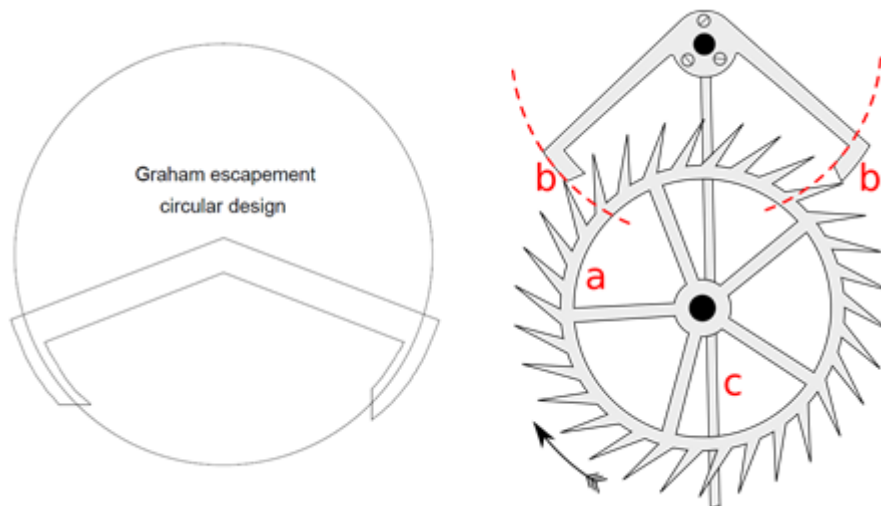
En una catalina de 15 dents, una dent avança en cada pulsació  $12^\circ$  ( $360^\circ / (15 \text{ dents} \cdot 2 \text{ paletes})$ ), i idealment està en contacte amb la cara d'impuls d'una paleta els  $12^\circ$ . En el cas real, restem un d'aquests graus a causa del marge i, per tant, la dent transmet energia en  $11^\circ$  en comptes de fer-ho en  $12^\circ$ . El treball serà de  $1 \cdot 11 / 12 = 0,916$ . D'aquí podem deduir que l'eficiència que perdem respecte el cas ideal és del 8,33%.

La millora de la catalina de 15 dents respecte la de 30 dents és d'un 8,32% en l'eficiència real de l'escapament.

### 6.3.4. Disseny circular, disseny equidistant i disseny semi-tangencial

En l'exemple anterior de disseny d'un sistema d'escapament (Figura 18), s'ha donat especial importància a la simetria entre la posició del palet d'entrada i el de sortida, per tal que l'impuls rebut pel pèndol fos igual en les dues direccions. O sigui, s'han calculat les forces per tal que  $F_i$  (força d'impuls) fos igual en la cara d'impuls del palet d'entrada i la cara d'impuls del palet de sortida.

El que no és simètric en l'exemple anterior són les cares de bloqueig de l'àncora. Si es traça un cercle amb el centre en el punt de subjecció de l'àncora, tal i com es mostra a la Figura 20, i que biseccioni les cares d'impuls dels palets, es pot veure que la cara de bloqueig del palet d'entrada queda fora el cercle i la cara de bloqueig del palet de sortida queda a dins. Això s'anomena disseny circular. Aquest tipus de disseny que segueix la simètrica en les cares d'impuls però no en les cares de bloqueig és apropiat per un sistema d'oscil·lació amb un pèndol, ja que no és necessari un bloqueig extra de l'àncora.



*Figura 20. Escapament Graham. Disseny circular*

En el cas d'un sistema d'oscil·lació amb un volant d'inèrcia, però, s'ha de tenir en compte que caldrà que se li apliqui al conjunt àncora – catalina un bloqueig extra, per tal de que no es mogui de posició durant la oscil·lació del volant.

Aquesta diferència en el disseny de l'escapament ve justificada per la diferència principal que hi ha entre l'escapament d'un rellotge amb pèndol i l'escapament d'un rellotge amb volant d'inèrcia: el pèndol mai és independent del moviment de l'àncora, mentre que el volant d'inèrcia fa un moviment independent del moviment de l'àncora durant gran part del seu recorregut total.

El disseny equidistant que es presenta a la Figura 21 permet que les cares de bloqueig en els dos palets siguin simètriques, tot i que l'impuls que rebrà l'àncora d'un i altre palet deixa de ser igual:



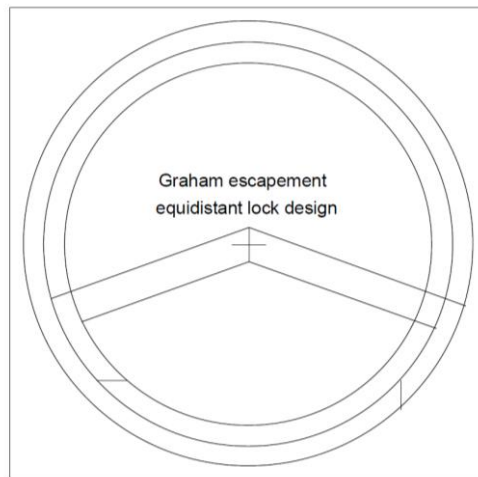


Figura 21. Escapament Graham. Disseny equidistant

En un escapament de pèndol (com l'escapament Graham), les cares de bloqueig han de ser corbes per tal d'aconseguir l'anomenat "cop mort" (*dead-beat*), on la catalina no es pot moure ni endavant ni enrere durant el bloqueig, per tal d'evitar que hi hagi retrocés. En el cas d'un escapament de volant d'inèrcia és necessari assegurar que l'àncora no es mourà de lloc mentre el volant d'inèrcia fa el seu recorregut de forma independent a aquesta. Per tal d'assegurar-ho, la cara de bloqueig de l'àncora es crea amb tal geometria que fa que al lliscar la dent per la seva superfície, la catalina avanci lleugerament, creant així una petita acció de unió que ajuda a l'àncora a mantenir-se al seu lloc. D'aquesta acció se n'anomena "atrapament" (*draw*). Per tal de desfer aquesta "unió" que s'ha creat, es necessita fer un parell sobre la unió, de la que s'ocupa el volant d'inèrcia en tornar a entrar en contacte amb l'àncora.

En un rellotge amb volant d'inèrcia és important que les cares de bloqueig siguin simètriques per tal de tenir el mateix atrapament en els dos palets, necessitant així el mateix parell en les dues direccions d'oscil·lació del volant. Tot i així, i com s'ha comentat anteriorment, això provoca que la força que reben les cares d'impuls dels dos palets no siguin iguals.

L'estratègia que se segueix normalment en aquest cas és seguir un disseny circular i adaptar l'atrapament en cada palet, per tal d'equilibrar les forces que el volant d'inèrcia haurà de fer a cada palet per alliberar l'àncora. Per altra banda, això implica un error en l'impuls que rep el palet, que s'acostumen a corregir variant lleugerament l'angle de les cares d'impuls, passant dels ideals  $45^\circ$  a  $49^\circ$ , i sacrificant un 0,5% d'eficiència.

### 6.3.5. Escapament per un rellotge amb volant d'inèrcia. Escapament suís.

#### 6.3.5.1. Doble rodet

Tal i com s'ha comentat anteriorment, la diferència principal entre un escapament amb pèndol i un escapament amb volant d'inèrcia és que aquest últim fa part de la seva oscil·lació de forma independent a l'àncora. Conseqüentment, se suma un nou element important al sistema: el doble rodet.

Aquest element va unit al volant d'inèrcia, i és l'encarregat de pressionar l'àncora per desfer l'atrapament creat i de rebre l'impuls que arriba a través dels palets des de la catalina. També s'ocupa d'assegurar que l'àncora no es desplaçarà mentre el volant d'inèrcia oscil·la lliurement.

El doble rodet té dues parts, o superfícies, principals: en la primera s'hi troba el pin d'impuls, i és la part encarregada de desbloquejar l'àncora i rebre l'impuls que aquesta li dona, és el rodet d'impuls. La segona superfície s'anomena rodet de seguretat, i la seva funció és la d'assegurar que l'àncora no es pot moure de lloc durant el moviment independent del volant d'inèrcia, per fer-ho, aquest rodet té un tall de seguretat, que permet que el pin de seguretat es mogui només si el pin d'impuls està en contacte amb l'àncora. En la Figura 22 es mostra un escapament amb el doble rodet, i en la Figura 23 el detall dels components d'aquest sistema.

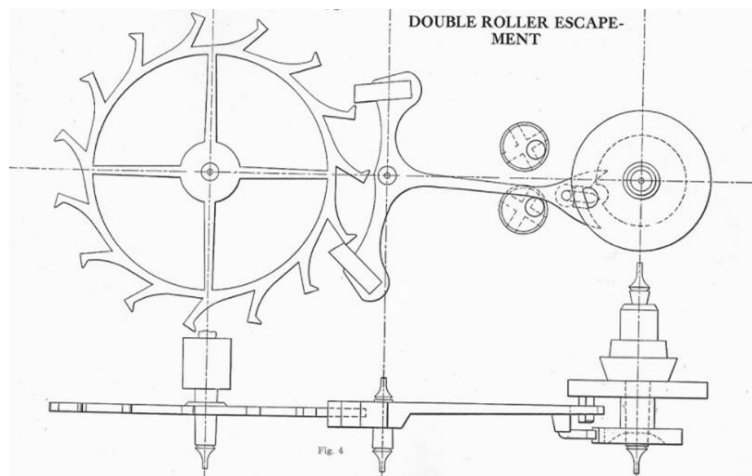


Figura 22. Escapament amb doble rodet



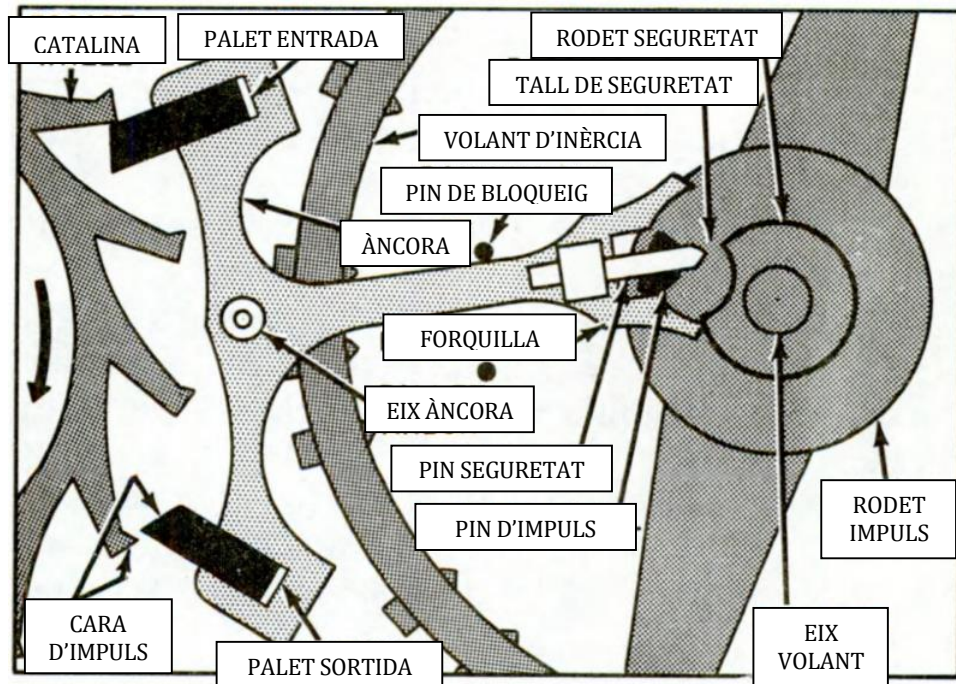


Figura 23. Components del doble rodets

Per tal de dissenyar el doble rodets, s'han de tenir en compte els següents punts:

- La forquilla i el pin de seguretat de l'àncora han d'estar en plans diferents, ja que cada component ha de tenir interferència amb elements diferents del doble rodets.
- S'ha de calcular la distància entre el centre del doble rodets i el centre de rotació de l'àncora tenint en compte el punt d'intersecció entre forquilla i pin d'impuls i tenint en compte els graus de rotació que el pin d'impuls farà en contacte amb la forquilla.
- S'ha de calcular el diàmetre del rodets de seguretat tenint en compte la llargada del pin de seguretat i els graus de rotació que farà l'àncora en cada pulsació.
- En el rodets de seguretat, és necessari fer un tall de seguretat, per tal que el pin pugui passar lliurement quan el pin d'impuls està en contacte amb l'àncora.
- Els pins de bloqueig es posicionen a partir dels graus de rotació de l'àncora. És necessari deixar un marge d'aproximadament  $2^\circ$  quan es posicionen els pins de bloqueig, per assegurar que quan el pin d'impuls torni, el contacte comenci una mica per sota de la punta de la forquilla.
- El forat de la forquilla ha de ser més ample que el pin d'impuls.

Tenint en compte això, es podrà dissenyar un sistema que no permeti que la catalina desbloquegi l'àncora fora de temps, i que no es provoqui un bloqueig del mecanisme.

### 6.3.5.2. Dents d'impuls (*Club-tooth*)

Una altra diferència de l'escapament suís és la forma de les dents de la catalina. Les dents es dissenyen en forma de dents d'impuls, fent que la dent tingui ella mateixa una cara d'impuls.

Aquest nou disseny proporciona dos avantatges que repercuteixen directament en l'eficiència de la transmissió d'energia. En primer lloc, la cantonada de sortida de la dent està més amunt que la cantonada d'entrada, cosa que fa que sigui possible reduir el marge perquè no s'encalli i augmenti l'eficiència. Per altra banda, al tenir la dent una cara d'impuls per ella mateixa, els graus d'impuls total es reparteixen entre dent i palet, fent que els palets puguin ser més prims que en un escapament Graham.

En un escapament ben dissenyat, es tindran en compte els graus d'elevació del palet i el gruix de les dents i els palets. La proporció ideal és tenir 10 graus d'elevació (tenint en compte que 8,5° seran d'elevació i 1,5° seran de marge) i els 12 graus de gruix ja comentats en el capítol 6.3.3.3. En la Taula 1 es presenten les combinacions més habituals:

	PALET		DENT	
	Elevació	Gruix	Elevació	Gruix
<b>1</b>	6°	7°	2,5°	4°
<b>2</b>	5,5°	6,5°	3°	4,5°
<b>3</b>	5°	6°	3,5°	5°
<b>4</b>	4°	5°	4°	6°

*Taula 1. Proporcions entre palets i dents d'un escapament suís*



## 6.4. Sistemes d'oscil·lació

### 6.4.1. Sistema Foliot

El sistema Foliot és un tipus de regulador de rellotge que va aparèixer al segle XIV, encara que alguns autors indiquen que va poder ser inventat cap al 1285 [5]. A finals del segle XVII es va deixar d'utilitzar, quan va ser definitivament desplaçat pel pèndol. El nom prové del francès "faire le fou", donar voltes com un boig.

Aquest sistema consisteix en un conjunt format per una barra horitzontal (foliot) amb dos contrapesos situats en els seus extrems, muntats sobre un eix vertical en el qual se situen els dos palets de l'escapament (Figura 24).

En oscil·lar la barra horitzontal, els dos palets deixen anar alternativament les dents de la roda d'escapament (escapament de Verge), les quals donen simultàniament un petit impuls destinat a mantenir les oscil·lacions del foliot. Per tal de regular-lo es varia la posició dels dos contrapesos de forma que sempre estiguin a la mateixa distància de l'eix del balancí. Si el rellotge s'endarrereix cal apropar els pesos entre ells, si el rellotge s'avança cal allunyar-los.

L'error de les primeres màquines amb aquest sistema era d'aproximadament mitja hora al dia. Cal dir, però, que les primeres màquines només portaven l'agulla horària, cosa que permetia saber l'hora d'una forma molt aproximada [6].

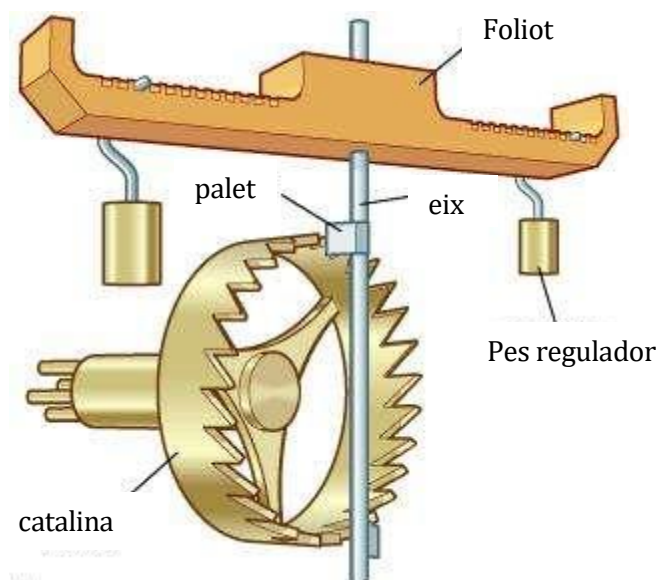


Figura 24. Sistema de Foliot



### 6.4.2. Pèndol

El rellotge de pèndol va ser inventat l'any 1656 per Christiaan Huygens [7]. Aquest disseny va ser inspirat per un estudi anterior que havia fet sobre pèndols Galileo Galilei l'any 1602. Galilei va descobrir la propietat clau que fa dels pèndols un element útil pel cronometratge: l'isocronisme.

El pèndol es va començar a utilitzar combinat amb l'escapament de Verge (Figura 25), adaptant els rellotges que antigament havien usat l'oscil·lador Foliot. Al ser el pèndol un oscil·lador harmònic, va incrementar enormement la precisió dels rellotges, passant dels 15-30 minuts diaris de desajust a 15 segons.



*Figura 25. Escapament Verge amb pèndol*

Tot i així, els pèndols usats amb escapaments de Verge tenien una amplitud d'oscil·lació molt gran (entre  $80^\circ$  i  $100^\circ$ ) i això provocava que no fossin prou acurats. El període d'oscil·lació del pèndol no era isòcron, amb uns graus de variació degut a l'error circular que canviaven l'amplitud del moviment [8].

Adonar-se que només les oscil·lacions petites del pèndols generaven un moviment isòcron va fer que els fabricants de rellotges busquessin solucions per dissenyar nous escapaments que complissin aquesta condició, inventant l'escapament Graham, on l'amplitud de la oscil·lació és d'entre  $4^\circ$  i  $6^\circ$ .

Un altre avantatge d'aquest nou escapament era que permetia fer rellotges amb pèndols mes llargs i més lents, que havien de vèncer una menor resistència de l'aire i necessitaven menys energia per seguir oscil·lant [9].





### 6.4.3. Volant d'inèrcia balancejat

El volant d'inèrcia balancejat o volant regulador és un oscil·lador usat en rellotges mecànics que funciona de forma anàloga a un pèndol.

És una roda amb un gir ponderat d'anada i tornada, que torna a la seva posició mitjançant una molla espiral (Figura 26). Cada gir del volant permet que el sistema d'engrenatges avanci una magnitud fixa. La combinació de la massa de la roda amb l'elasticitat de la molla manté constant el temps entre cada canvi de posició, fent d'aquest sistema un oscil·lador harmònic amb una freqüència de ressonància.



Figura 26. Volant d'inèrcia balancejat

Al 1657, Robert Hooke va proposar per primer cop la idea de fer servir una molla recta i plana com a base de l'oscil·lador per un rellotge, en comptes del pèndol. La molla, seguint la Llei de Hooke, proveïa una força de recuperació proporcional al seu desplaçament. Al 1675, Christiaan Huygens va veure que una molla que treballés a torsió permetia fer un disseny més compacte, pràctic i robust del sistema oscil·lador, millorant la mesura del temps dels rellotges portàtils [10].

El període d'oscil·lació  $T$  [s], d'un cicle complet del volant, es determina a partir del moment d'inèrcia del volant:  $I$  [ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ] i de la rigidesa (o constant) de la molla:  $k$  [ $\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}$ ] [11]:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}} \quad (\text{Eq. 2})$$



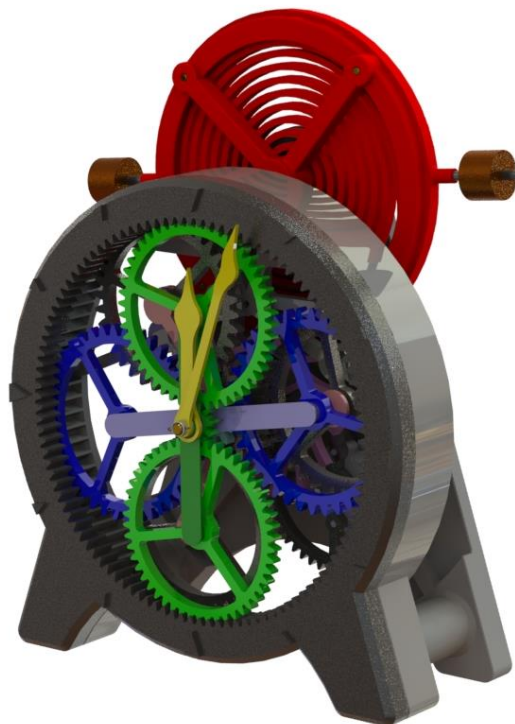
## 7. Estudi cinemàtic del tren epicicloïdal – dimensionat del sistema

### 7.1. Dimensionament. Consideracions generals

El disseny del rellotge s'ha pensat per tal que aquest sigui de sobretaula (Figura 27). La seva estructura es divideix en dues parts principals: un xassís posterior, que subjecta tots els eixos del rellotge, i un xassís davanter, que és a la vegada xassís, corona del tren d'engranatges i esfera.

La major part de les peces que conformen el rellotge han estat pensades per ser fabricades per impressió 3D de plàstic, amb una cara llisa i amb pocs voladissos. En els casos on això no és possible s'ha pensat com dividir la impressió en dues o més parts i com encaixar les peces entre sí.

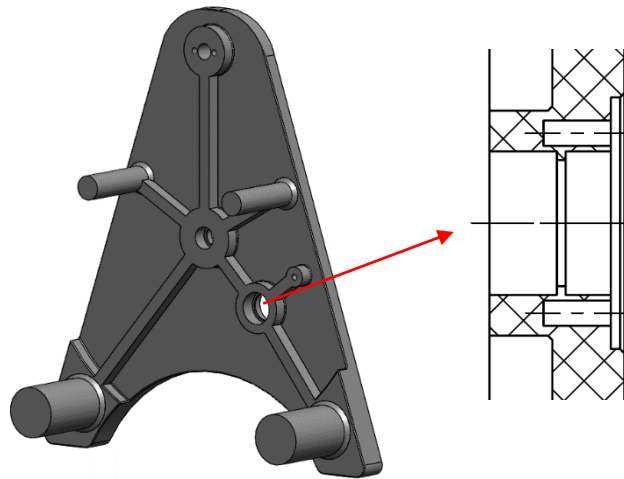
En el cas de les peces que no es poden fabricar amb impressió 3D, com poden ser els rodaments, coixinets i eixos, s'han buscat elements comercials i normalitzats que es poden comprar fàcilment en ferreteries industrials.



*Figura 27. Acoblament final del rellotge*

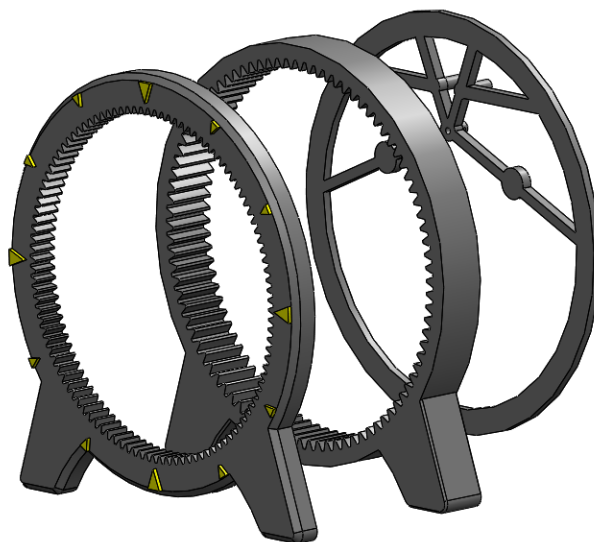
### 7.1.1. Estructura

El xassís posterior s'ocupa de subjectar els 3 eixos principals del rellotge: l'eix del tren d'engranatges, l'eix del conjunt molla-barrilet i l'eix del volant d'inèrcia. En aquesta peça s'han fet cavitats per les parelles de rodaments que subjecten aquests eixos, així com alguns sortints o "topalls" per a aquests mateixos rodaments, tal i com es pot veure a la Figura 28. També s'hi han afegit forats que posteriorment es rosquen per tal de collar les tapes que subjecten tals rodaments.



*Figura 28. Xassís posterior*

El xassís davanter està dividit en tres peces: dues corones i un suport per l'eix de l'àncora. La primera corona fa, també, d'esfera del rellotge. En la Figura 29 es poden veure les diferents parts del xassís davanter del rellotge.

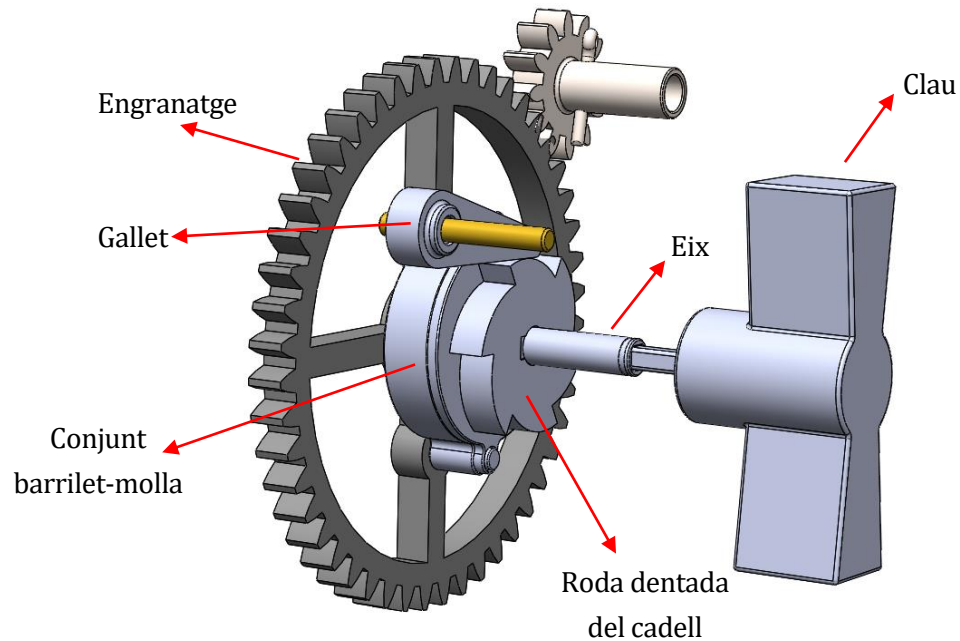


*Figura 29. Xassís davanter*



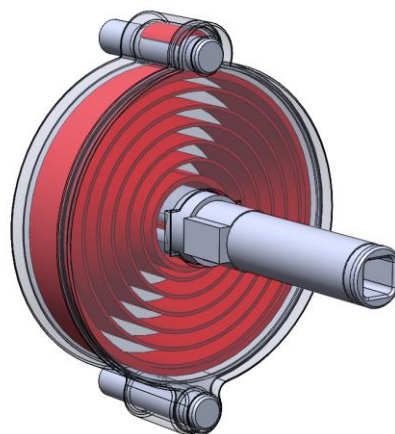
### 7.1.2. Sistema molla

El sistema molla es compon de 5 elements o subsistemes principals, tal i com es pot veure a la Figura 30: el conjunt de la molla i el barrilet, els engranatges encarregats de portar el moviment cap al tren d'engrenatges del rellotge, el conjunt del cadell (format per un gallet i una roda dentada), l'eix i la clau.



*Figura 30. Parts del sistema molla*

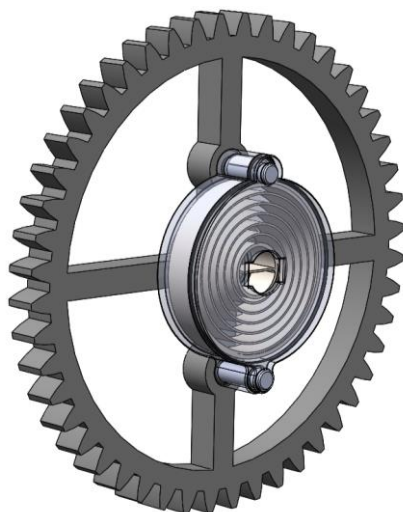
Per tal de muntar el conjunt de la molla i el barrilet (Figura 31), es lliga un extrem de la molla a l'eix i seguidament s'introdueix al barrilet. L'altre extrem de la molla es lliga al barrilet a través d'un passador.



*Figura 31. Muntatge conjunt molla-barrilet*

Aquest mateix passador, juntament amb un altre col·locat a la part inferior del barrilet, s'usa per unir el conjunt molla – barrilet amb l'engranatge que transmet el moviment cap a l'eix principal

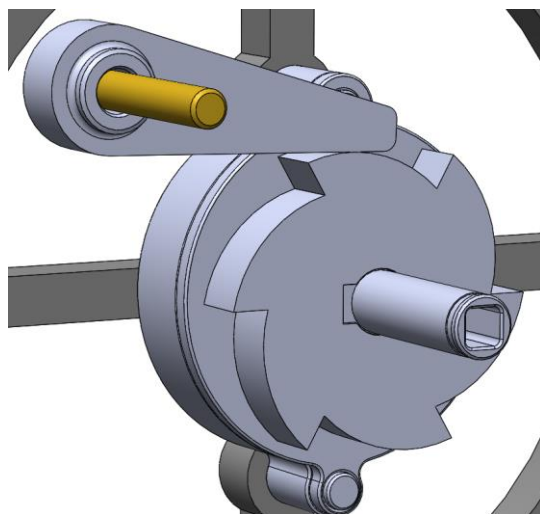
del rellotge (Figura 32).



*Figura 32. Muntatge barrilet - engranatge*

Per altra banda, també s'afegeix al sistema el conjunt del cadell. Aquest conjunt és l'encarregat d'impedir que la força de la molla es perdi, bloquejant el gir del conjunt en una direcció.

La roda dentada del cadell s'uneix a l'eix amb una xaveta, fent que els dos elements girin conjuntament. El gallet s'uneix a l'estructura del rellotge a través d'un eix que el deixa moure's lliurement (Figura 33).



*Figura 33. Conjunt cadell*

La Figura 34 mostra la secció de l'eix del conjunt molla. L'eix està subjectat per un extrem per una parella de rodaments rígids de boles. Aquests rodaments van fixats per les pistes interiors a través



d'un circlip i dos distancials. La pista exterior del primer rodament està encaixada entre el sortint del forat del xassís i una tapa (unida amb dos cargols). La pista exterior del segon rodament és completament lliure.

En el cas de l'engranatge s'ha triat un coixinet que per una banda topa amb un sortint de l'eix i per l'altra topa amb un circlip.

El color vermell de la figura indica quins encaixos són amb ajust (vermell) i quins són amb joc (verd).

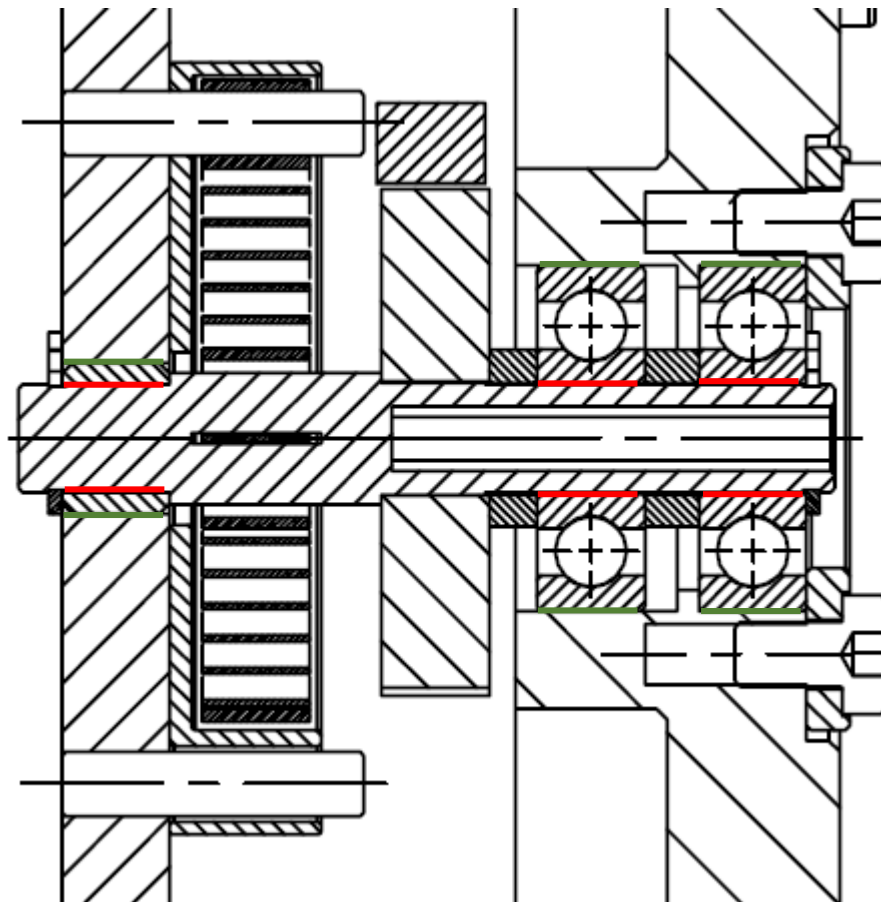
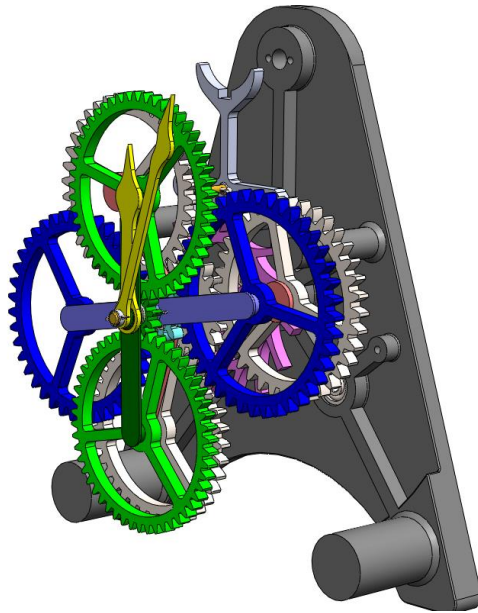


Figura 34. Secció de l'eix del conjunt molla

### 7.1.3. Sistema tren d'engranatges

En la Figura 35 es mostra el tren d'engranatges del rellotge. Per facilitar la comprensió del dibuix s'han suprimit les corones de totes les etapes.



*Figura 35. Tren d'engranatges del rellotge*

Totes les etapes del tren epicicloïdal i també la catalina tenen un eix comú. La Figura 36 mostra la secció de l'eix d'aquest conjunt.

En un extrem es troben una parella de rodaments rígids de boles (1). Aquests rodaments van fixats per les pistes interiors a través d'un distancial amb un passador (2), un espaiador simple i la roda dentada del conjunt molla (3) (que també està subjectada a l'eix a través d'un passador). La pista exterior del primer rodament està encaixada entre el sortint del forat del xassís i una tapa (unida amb dos cargols). La pista exterior del segon rodament és completament lliure.

Després de la roda dentada del conjunt molla es troba la catalina (4). La catalina s'ha subjectat amb un rodament i un coixinet. Aquest coixinet topa amb el porta-satèl·lits de la primera etapa del tren epicicloïdal (5), que a la vegada topa amb el porta-satèl·lits de la segona etapa del tren (6). Aquest segon porta-satèl·lits està unit a l'eix a través d'un passador.

Els passadors que uneixen tant el segon porta-satèl·lits com la roda dentada de la molla fan que aquests dos elements girin a la mateixa velocitat. Per tant, que la força que fa la molla arribi a la segona etapa del tren epicicloïdal. Aquest sistema s'ha dissenyat així per tal que la corda del rellotge tingui una major durada.





Si se segueix amb la cadena d'elements, el segon porta-satèl·lits topa amb el tercer porta-satèl·lits (7), que es troba amb l'agulla minutera i amb un espaiador amb passador (8).

L'agulla minutera ajusta prou amb l'eix com per girar conjuntament amb aquest. No s'hi ha posat cap passador per tal d'unir-los perquè en cas de que el rellotge es pari, l'usuari ha de ser capaç de moure l'agulla sense fer girar tot el tren. El mateix passa amb l'agulla horària, que encaixa amb el tercer porta-satèl·lits.

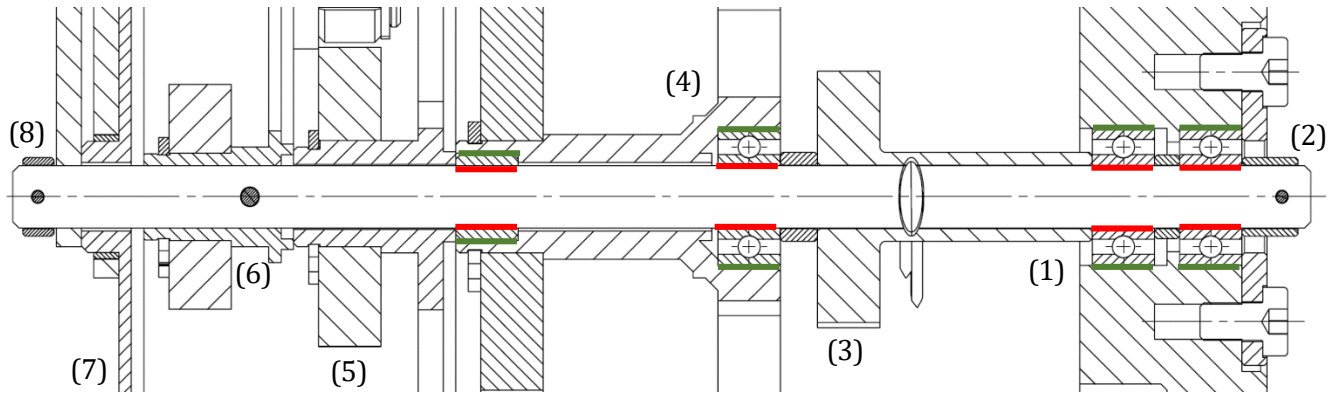


Figura 36. Secció eix principal rellotge

Pel que fa als planetes, tots s'han unit als porta-satèl·lits a través d'un coixinet i amb un circlip, tal i com es mostra a la Figura 37.

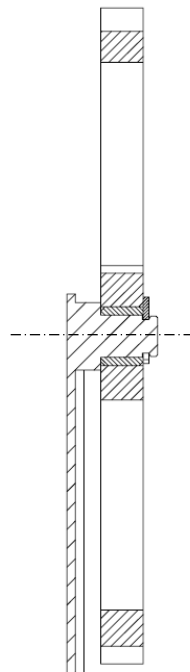
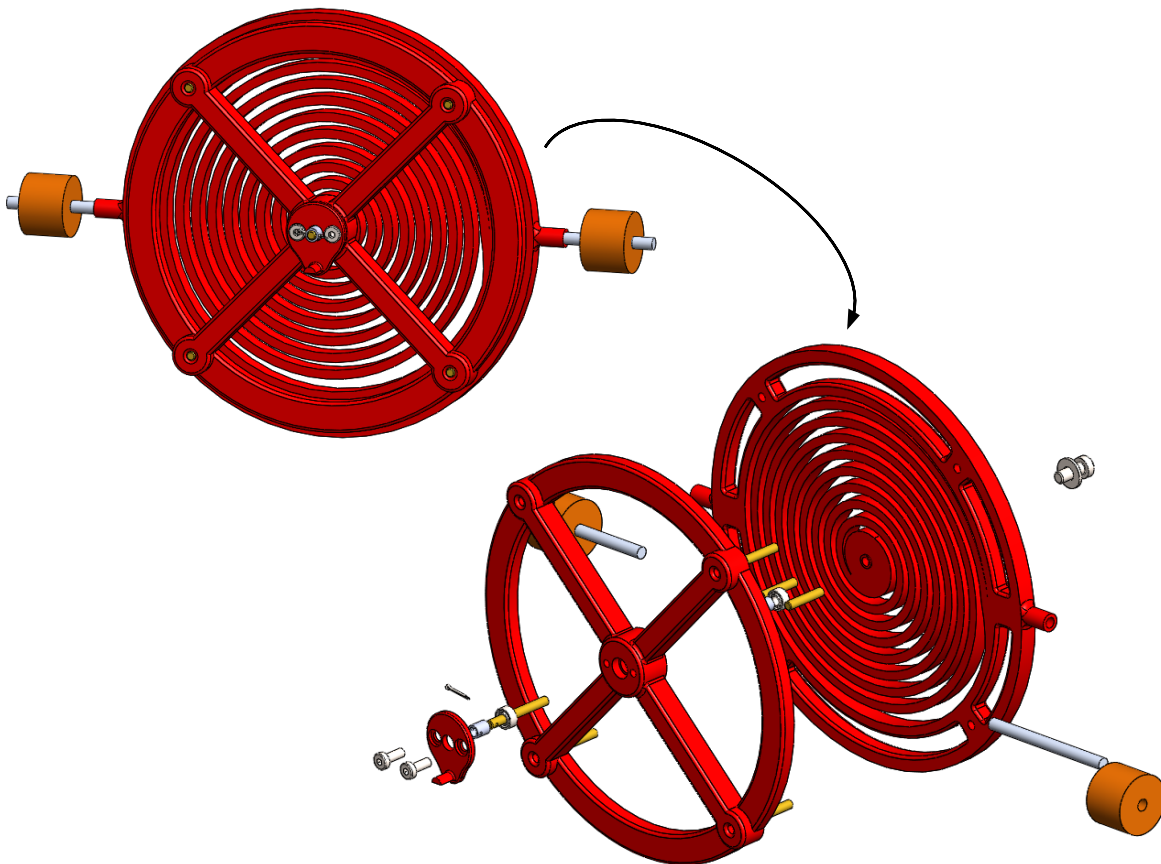


Figura 37. Muntatge planetes

#### 7.1.4. Sistema volant d'inèrcia

El sistema volant d'inèrcia (Figura 38) està compost per 3 elements principals de plàstic: una molla, una estructura circular i el pin d'impuls. El centre de la molla està fixat al xassís posterior del rellotge, mentre que la part exterior d'aquesta molla s'uneix a l'estructura circular. Aquesta estructura s'ocupa de transmetre la rotació del sistema al pin d'impuls, que interactua amb l'àncora de l'escapament.



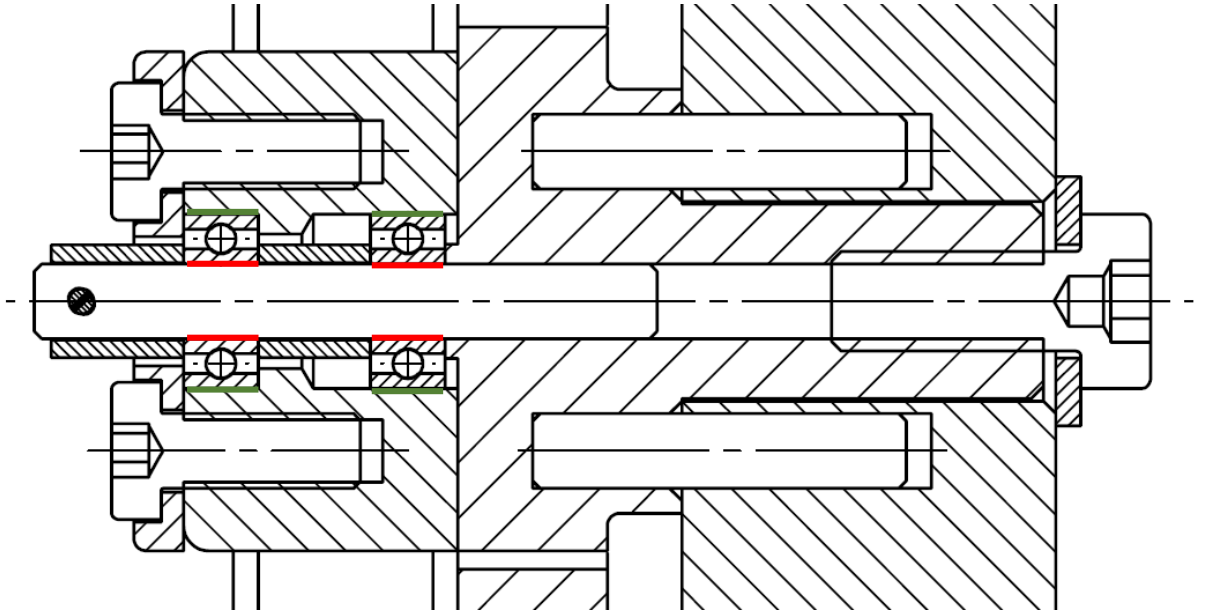
*Figura 38. Elements del volant d'inèrcia*

La unió entre la molla i l'estructura circular es fa amb quatre passadors a pressió. La unió entre els altres elements del sistema i el xassís posterior es mostra a la Figura 39.

Com es pot veure, el centre de la molla s'uneix al xassís exterior a través d'un eix i dos passadors, per tal de que aquesta peça no es pugui moure, es rosca la part interna de l'eix i es cargola amb el xassís. A l'interior d'aquest mateix eix s'hi encasta un altre eix d'un diàmetre inferior, aquest eix no gira.



En aquest mateix eix i per tal d'unir l'estructura circular al sistema, s'hi posa una parella de rodaments rígids de boles. Aquests rodaments tenen les pistes interiors fixades i un d'ells té la pista exterior bloquejada mentre que l'altre és lliure. Per tal de fixar una de les pistes exteriors s'hi afegeix una tapa amb cargols, que també fa de suport del pin d'impuls del volant.



*Figura 39. Secció de l'eix del volant d'inèrcia*

### 7.1.5. Components normalitzats

Els elements normalitzats que s'han fet servir per l'assemblatge del rellotge són els que es mostren a la taula següent (Taula 2):

Descripció	DIN	Marca	Referència fabricant	Dimensions	Quantitat
Rodament rígid de boles	DIN625	SKF	* 625	Diàmetre interior = 5mm Diàmetre exterior = 16mm Amplada = 5mm	2
Rodament rígid de boles	DIN625	SKF	618/5	Diàmetre interior = 5mm Diàmetre exterior = 11mm Amplada = 5mm	5
Coixinet de fricció	-	SKF	PCM 050705	Diàmetre interior = 5mm Diàmetre exterior = 7mm Amplada = 5mm	10
Molla de torsió		LESJÖFORS	SCS-0909		1
Barra circular llautó	-	-	-	Diàmetre exterior = 3mm Llargada = 1m	0,2
Barra circular llautó	-	-	-	Diàmetre exterior = 5mm Llargada = 1m	0,1
Passador elàstic d'aleta	DIN94	WURTH	0470 16 16	Diàmetre = 1,6mm Llargada = 16mm	3

Passador elàstic d'aleta	DIN94	WURTH	0470 1 16 5	Diàmetre = 1mm Llargada = 16mm	4
Circlips arbres	DIN471	Norelem	07330-050600	Diàmetre arbre = 5mm Diàmetre interior = 4,7mm Amplada = 0,6mm	2
Circlips arbres	DIN471	Norelem	07330-080800	Diàmetre arbre = 8mm Diàmetre interior = 7,6mm Amplada = 0,8mm	3
Circlips E-type	DIN6799	Norelem	07332-0400	Diàmetre arbre = 5mm Diàmetre interior = 4mm Amplada = 0,7mm	7
Cargol Allen cap baix	DIN 7984	-	-	Mètrica = M3 Llargada = 8mm	6
Cargol Allen cap baix	DIN 7984	-	-	Mètrica = M4 Llargada = 10mm	1

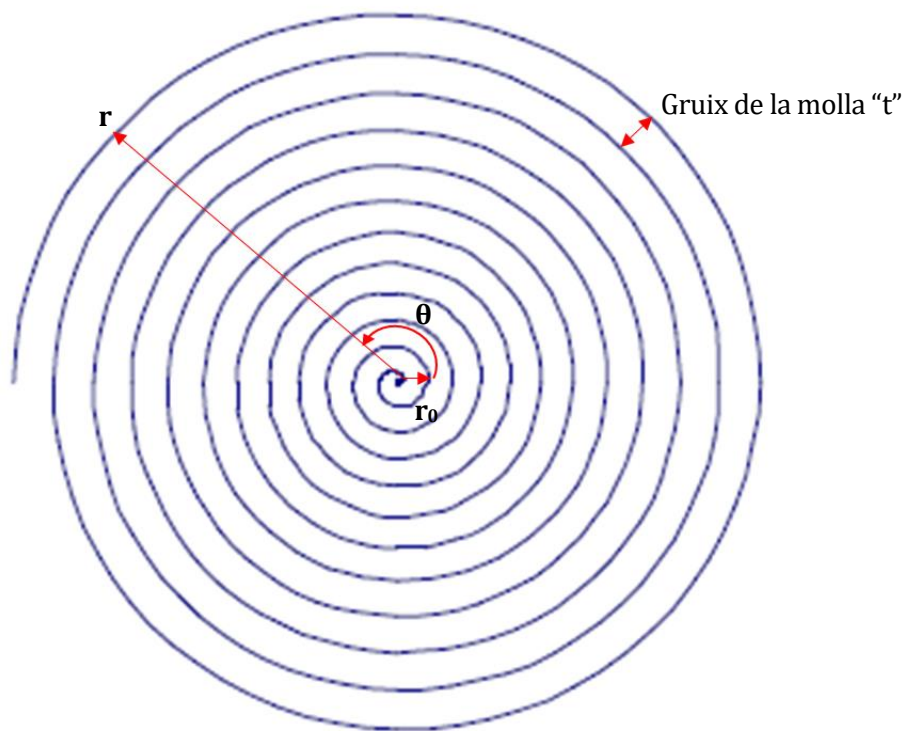
Taula 2. Llista dels components normalitzats del rellotge

## 7.2. Càlcul del barril i molla

Per tal de determinar durant quantes voltes la molla principal serà capaç de donar el parell necessari per seguir movent el tren d'engranatges, s'ha de fer un estudi del moment torsor que pateix la molla, tenint en compte la seva geometria (gruix, amplada, longitud) i la geometria del barrilet (diàmetre interior, diàmetre de l'arbre), així com del material de la molla (mòdul d'elasticitat, límit elàstic).

En primer lloc es relaciona la llargada de la molla amb el gruix d'aquesta i el diàmetre que ocupen les seves múltiples voltes al voltant d'un arbre:

Es considera que la forma d'una molla enrotllada al voltant d'un arbre es pot interpretar com l'espiral d'Arquímedes representada a la Figura 40, amb una distància entre voltes igual al gruix de la molla.



*Figura 40. Espiral d'Arquímedes*

Sabent que la llargada d'una corba en coordenades polars és:



$$x = \int_{r_0}^r \sqrt{r^2 \left( \frac{d\theta}{dr} \right)^2 + 1} dr \quad (Eq. 3)$$

On  $r_0$  representa el radi interior de la molla (el radi de l'arbre). Si s'aplica que la distància entre voltes és igual al gruix de la molla, representada per  $t$ :

$$x = \int_{r_0}^r \sqrt{r^2 \left( \frac{2\pi}{t} \right)^2 + 1} dr \quad (Eq. 4)$$

$$x = \frac{r}{2} \sqrt{ar^2 + 1} + \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln \left( r\sqrt{a} + \sqrt{ar^2 + 1} \right) \Big|_{r_0}^r \quad (Eq. 5)$$

On 
$$a = \left( \frac{2\pi}{t} \right)^2 \quad (Eq. 6)$$

Tenint en compte els gruixos estàndard de les molles de rellotgeria es pot apreciar que el valor de  $a$  és de l'ordre de  $10^5$ . Per tant l'expressió anterior es pot simplificar a:

$$x \approx \frac{r^2}{2} \sqrt{a} \Big|_{r_0}^r \quad (Eq. 7)$$

Resolent: 
$$x \approx \frac{\pi(r^2 - r_0^2)}{t} \quad (Eq. 8)$$

Per tant es pot modelar la molla com si ocupés un espai circular al voltant de l'arbre o a l'interior del barrilet (depenent de si té la corda al màxim o al mínim, respectivament) amb un error negligible.

La molla es pot representar tal i com es mostra a la Figura 41, sent:

$r_0$  = radi de l'arbre del barrilet

$R$  = radi intern del barrilet

$s$  = radi exterior de la molla totalment tensada

$S$  = radi interior de la molla totalment destensada

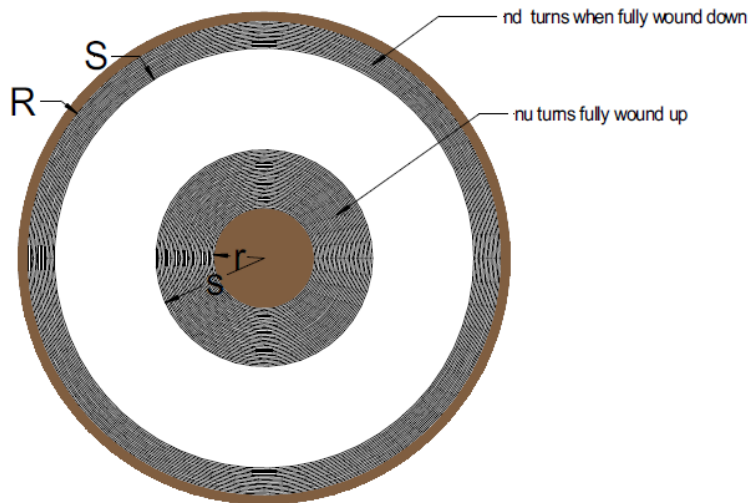


Figura 41. Geometria de la molla dins el barrilet

I es pot calcular el nombre de voltes de la molla quan està totalment tensada:

$$n_u = \frac{(s - r_0)}{t} \quad (Eq. 9)$$

I el nombre de voltes de la molla quan està totalment destensada:

$$n_d = \frac{(R - S)}{t} \quad (Eq. 10)$$

El nombre de voltes actives,  $N$ , és la diferència entre les voltes quan la molla està tensada i les voltes quan la molla està destensada:

$$N = n_u - n_d \quad (Eq. 11)$$

L'àrea que la molla ocupa en planta és  $L_T \cdot t$ , sent  $L_T$  la llargada total de la molla. Aquesta àrea ha de ser igual a l'àrea en planta que ocupa la molla totalment tensada o destensada més una longitud de transició,  $l$ .

$$L_T = \frac{\pi(R^2 - S^2)}{t} + l = \frac{\pi(s^2 - r_0^2)}{t} + l \quad (Eq. 12)$$

On,

$$l = \pi(R + s) \quad (Eq. 13)$$





Un cop definides les relacions geomètriques de la molla, cal determinar com calcular el parell entregat per aquesta.

En l'extrem exterior, la molla fa un moment  $M$ , una força tangencial  $T$  i una força radial  $V$  contra el barrilet (Figura 42). El parell  $Q$  fent girar el barrilet respecte l'arbre és igual al moment que exerceix la força tangencial  $T$  respecte el centre de l'arbre més el moment  $M$ . El parell també és equivalent al moment de la molla en la seva unió amb l'arbre.

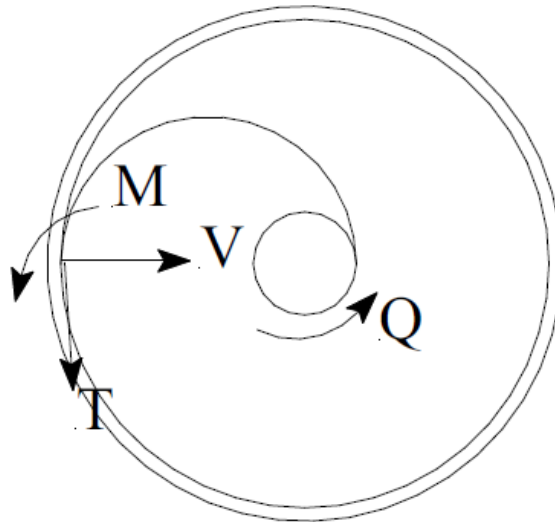


Figura 42. Diagrama de sòlid lliure de la molla

Per calcular el parell és necessari saber quin és el moment de la molla a l'arbre o saber quin és el moment i la força tangencial en algun punt de l'altre extrem de la molla.

Les forces i moments aplicats pel barrilet són desconeguts, però tot i així, hi ha una relació directa entre el moment torsor local i el canvi (local) de la curvatura de la molla en un punt concret respecte la seva forma original. Per tant, es considera que el parell es pot calcular a partir de les equacions de torsió de la molla.

Si es considera la torsió de la molla com a elàstica i tenint en compte que  $\rho$  és el radi de curvatura, la curvatura local de la molla es pot definir com:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\rho} \quad (\text{Eq. 14})$$

L'elongació que té una fibra a una distància  $y$  de l'eix neutral (eix en el qual la fibra no pateix cap canvi de llargada), es pot representar com  $y = d\theta$  (veure Figura 43). I la deformació corresponent vindrà representada per:

$$\varepsilon = \frac{y d\theta}{dx} \quad (\text{Eq. 15})$$

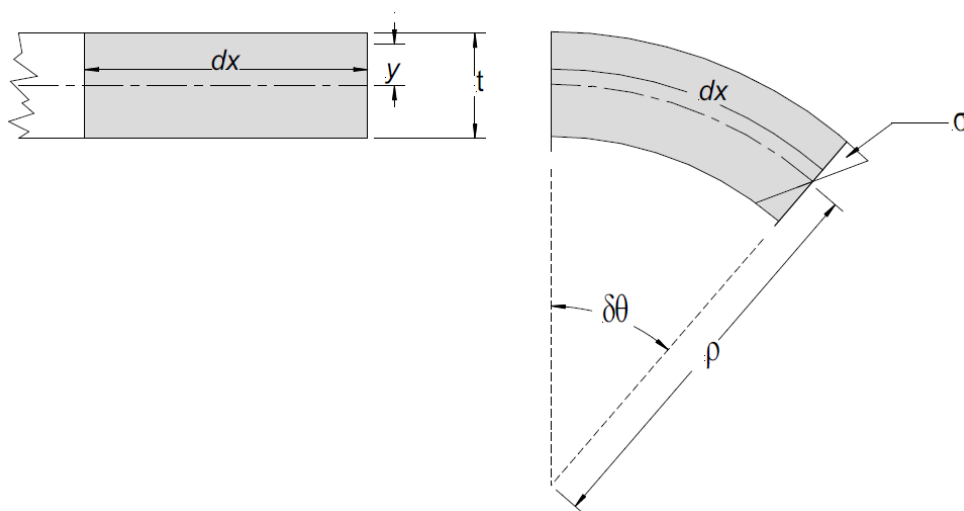


Figura 43. Curvatura de la molla sense deformació inicial

La distribució de tensions ve representada per:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y d\theta}{dx} \quad (\text{Eq. 16})$$

I el moment per:

$$M = \int y \sigma dA = E \frac{d\theta}{dx} \int y^2 dA \quad (\text{Eq. 17})$$

Per a una secció rectangular amb gruix  $t$  i amplada  $W$  es compleix que:

$$\int y^2 dA = \frac{1}{12} W t^3 \quad (\text{Eq. 18})$$

I es pot concloure que:



$$\int y^2 dA = \frac{1}{12} W t^3 \quad (\text{Eq. 19})$$

$$\sigma = E y \frac{1}{\rho} = \frac{12 M y}{W t^3} \quad (\text{Eq. 20})$$

$$M = E \frac{W t^3}{12 \rho} \quad (\text{Eq. 21})$$

Si, com s'ha comentat anteriorment, la torsió de la molla es considerés elàstica, amb l'equació anterior es podria trobar el parell que la molla exerceix a l'arbre del barrilet. Tenint en compte el gruix habitual de les molles i les dimensions dels barrilets de rellotgeria comercials, es pot assegurar que la torsió sempre és suficient perquè el material entri en la seva zona plàstica de deformació.

Així doncs, al tensar i destensar el material, aquest seguirà un cicle d'histeresi com el representat en la Figura 44. Al tensar la molla, el material d'aquesta entra en la zona plàstica, deformant-se de forma inelàstica. Quan finalment la molla es destensa, no torna a la seva posició inicial, sinó que té tensions residuals i deformacions residuals que fan que la forma de la curvatura variï al llarg de la vida de la molla. Aquest radi de curvatura residual té un efecte significatiu sobre el parell entregat per la molla, ja que la tensió total que tindrà la molla serà la suma de la tensió aplicada per tal de donar-li corda i la tensió residual acumulada.

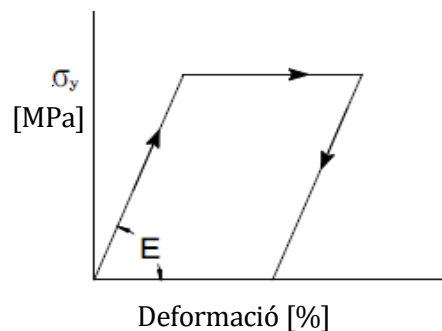


Figura 44. Cicle d'histeresi de la molla

Per tal de calcular el parell que la molla transmetrà cal determinar, doncs, per a qualsevol punt de la molla:

- La curvatura en la primera torsió, a partir d'ara  $\frac{1}{\rho}$
- La curvatura permanent de la molla lliure després de la primera torsió;  $\frac{1}{\rho_0}$

- La curvatura actual;  $\frac{1}{\rho}$
- El moment de torsió necessari per incrementar la curvatura des de  $\frac{1}{\rho_0}$  a l'actual.

Superposant les expressions de les tensions de càrrega i descàrrega de la molla, podem trobar la relació entre  $P$  i  $\rho_0$ , tal i com es mostra a continuació:

$$\frac{P}{\rho_0} = 1 - 3 \frac{\sigma_y P}{Et} + 4 \left( \frac{\sigma_y P}{Et} \right)^3 \quad (\text{Eq. 22})$$

Tenint en compte que  $\rho_0$  és la curvatura de la molla lliure després de la primera deformació, i que es parteix d'una secció inicialment deformada i per tant on les fibres tenen diferents longituds, es considera que  $v d\theta$  és la llargada d'una fibra amb radi  $v$  des del centre de curvatura (veure Figura 45).

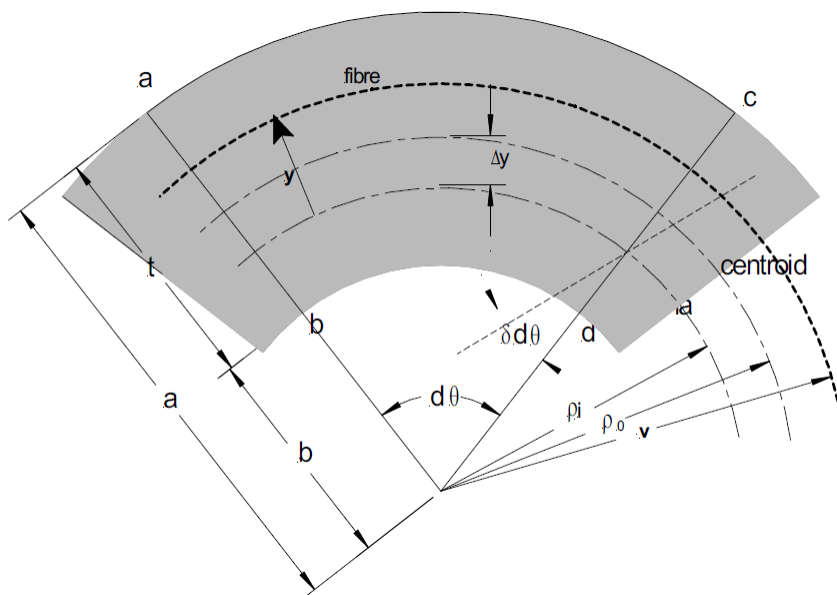


Figura 45. Curvatura de la molla amb deformació inicial

L'expressió de la deformació ve donada per:

$$\varepsilon = \frac{y(\delta d\theta)}{v d\theta} \quad (\text{Eq. 23})$$

Definint  $\rho_i$  com el radi de curvatura de l'eix neutral, tenim la relació:  $v = \rho_i + y$ , la distribució de tensions és:



$$\sigma = \frac{Ey(\delta d\theta)}{(\rho_i + y)d\theta} \quad (\text{Eq. 24})$$

Com que la força longitudinal és zero i les tensions residuals s'autoequilibren, la força resultant de la distribució de tensió a torsió ha de ser zero:

$$\int \sigma dA = \frac{E(\delta d\theta)}{d\theta} \int \frac{y}{(\rho_i + y)} dA = 0 \quad (\text{Eq. 25})$$

$$\int \frac{y}{(\rho_i + y)} dA = 0 \quad (\text{Eq. 26})$$

I combinant aquesta última expressió amb  $y = v - \rho_i$  podem treure:

$$\int \frac{v - \rho_i}{v} dA = 0 \quad (\text{Eq. 27})$$

$$\rho_i = \frac{A}{\int \frac{dA}{v}} \quad (\text{Eq. 28})$$

$$\int \frac{dA}{v} = \int_b^a W \frac{dv}{v} = W \ln \frac{a}{b} \quad (\text{Eq. 29})$$

$$\rho_i = \frac{t}{\ln \frac{a}{b}} \quad (\text{Eq. 30})$$

Si  $\rho_0$  és el radi de curvatura de la línia central de la secció abans de tornar a doblegar la molla, la distància entre l'eix neutral d'aquesta línia central és  $\rho_0 - \rho_i$ , i desenvolupant l'expressió anterior:

$$\Delta y = \rho_0 - \frac{t}{\ln a - \ln b} \quad (\text{Eq. 31})$$

On,

$$a = \rho_0 + \frac{t}{2}; b = \rho_0 - \frac{t}{2} \quad (\text{Eq. 32})$$

El moment de la força resultant de la distribució de tensions a torsió és igual al moment:

$$M = \int y \sigma dA = \int y \frac{Ey(\delta d\theta)}{(\rho_i + y)d\theta} dA = \frac{E(\delta d\theta)}{d\theta} (A \Delta y) \quad (\text{Eq. 33})$$

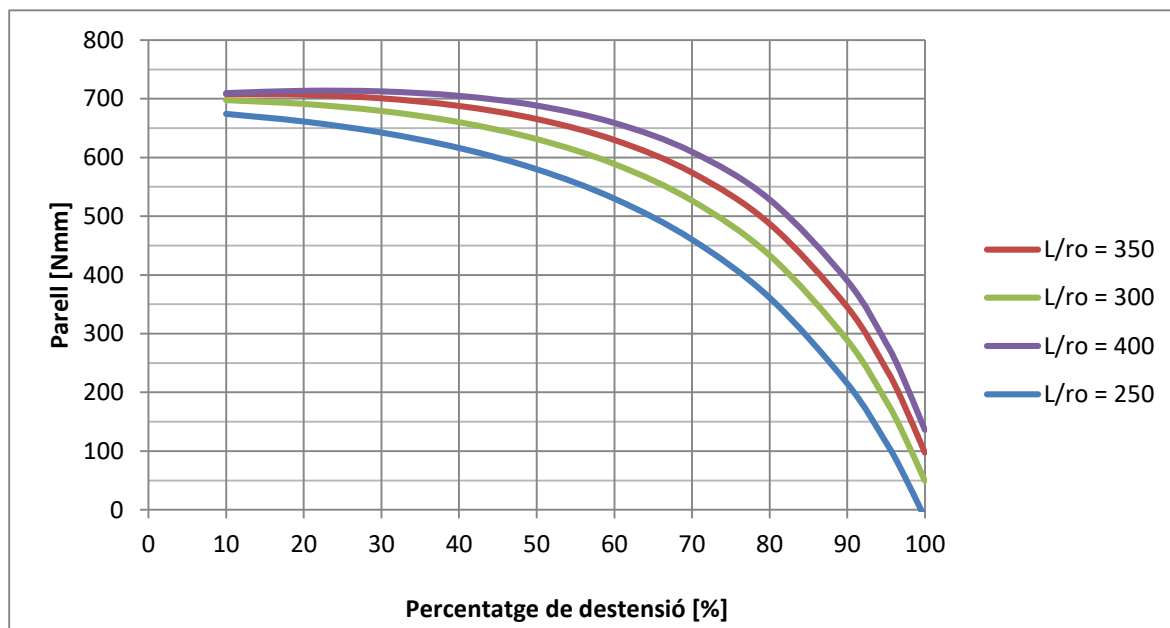
$$\rho_i d\theta = \rho(d\theta + \delta d\theta) \quad (Eq. 34)$$

$$M = E \left( \frac{\rho_i}{\rho} - 1 \right) A \Delta y \quad (Eq. 35)$$

Amb  $\rho = S + \frac{t}{2}$  durant el final de l'última distensió.

Les dades anteriors permeten, donat un material amb un límit elàstic i un mòdul de Young coneguts, una molla amb un gruix i una amplada coneguts i un nombre de voltes requerit, calcular quin parell transmetrà la molla a mida que es vagi destensant.

En el Gràfic 5, es poden veure les corbes de parell-tensió per a diferents longituds de molles (amb la mida de barrilet corresponent per cada llargada):



Gràfic 5. Parell vs. Destensió de la molla



## 7.3. Càlcul del tren d'engranatges

El tren d'engranatges consta de 3 etapes.

### 7.3.1. Primera etapa

L'entrada del moviment es produeix a través del sol (roda dentada central). L'eix del sol és solidari a l'eix de la catalina i gira a una velocitat de  $1 \text{ min}^{-1}$ .

El sol té 18 dents que engranen amb els planetes de 36 dents cada un. Aquests planetes engranen a continuació amb la corona, de 90 dents, que és fixa.

Aquesta distribució permet que en la primera etapa (Figura 46) es produeixi una reducció de  $i=6$  entre la velocitat del sol i la velocitat del porta satèl·lits.

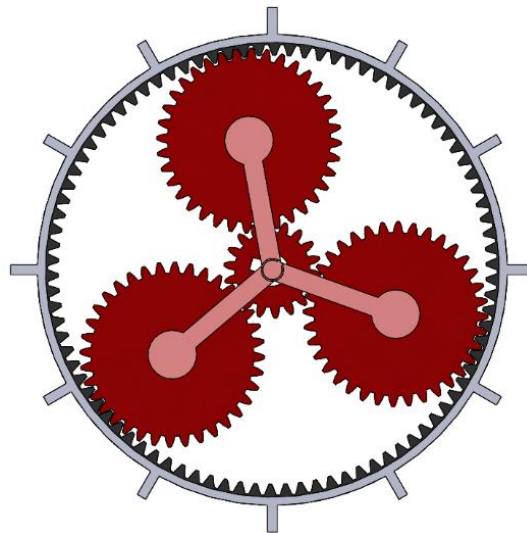


Figura 46. Primera etapa del tren d'engranatges

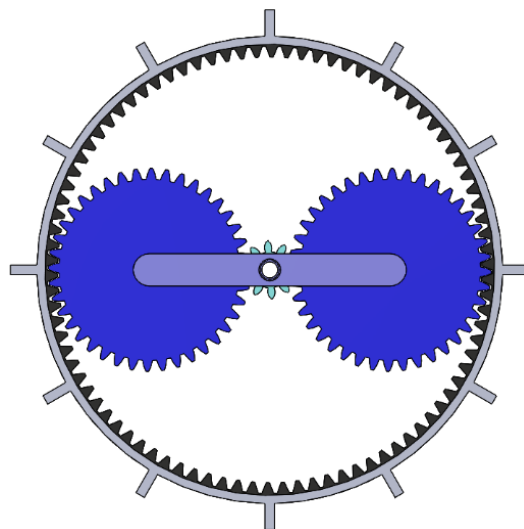
### 7.3.2. Segona etapa

En la segona etapa (Figura 47) l'entrada del moviment es torna a produir a través del sol. L'eix del sol és solidari a l'eix del porta satèl·lits de l'etapa anterior, així que té una velocitat de  $1/6 \text{ min}^{-1}$ .

El sol té 10 dents que engranen amb els planetes de 40 dents cada un. Aquests planetes engranen a continuació amb la corona, de 90 dents, que és FIXA. La corona de la primera etapa i la de la segona etapa és en realitat la mateixa roda dentada, ja que té el mateix nombre de dents. S'unifica tot en una peça del doble de gruix que les rodes dentades interiors.

Aquesta distribució permet que en la segona etapa es produeixi una reducció de  $i=10$  entre la velocitat del sol i la velocitat del porta satèl·lits.

L'eix del porta satèl·lits d'aquesta segona etapa anirà unit a l'agulla que representarà els minuts (agulla minutera).



*Figura 47. Segona etapa del tren d'engranatges*

### 7.3.3. Tercera etapa

En la tercera etapa (Figura 48) l'entrada del moviment es torna a produir a través del sol. L'eix del sol és solidari a l'eix del porta satèl·lits de l'etapa anterior, així que té una velocitat de  $1/60 \text{ min}^{-1}$ .

El sol té 8 dents que engranen amb els planetes de 40 dents cada un. Aquests planetes engranen a continuació amb la corona, de 88 dents, que és fixa.

Aquesta distribució permet que en la tercera etapa es produeixi una reducció de  $i=12$  entre la velocitat del sol i la velocitat del porta satèl·lits.

L'eix del porta satèl·lits d'aquesta tercera etapa anirà unit a l'agulla que representarà les hores (agulla horària).





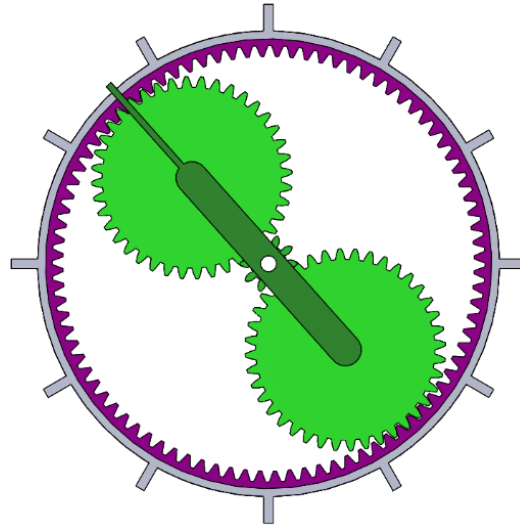


Figura 48. Tercera etapa del tren d'engranatges

### 7.3.4. Reduccions del tren d'engranatges

A la Taula 3 es presenten totes les reduccions del tren d'engranatges:

Roda dentada	z (dents)	Velocitat	i (relació de transmissió)		Agulles
Catalina	15	1 min <sup>-1</sup>			
Sol etapa 1	18	1 min <sup>-1</sup>	6		
Sol etapa 2	10	1/6 min <sup>-1</sup>		10	
Sol etapa 3	8	1/60 min <sup>-1</sup>	12		
Porta-satèl·lits etapa 3	-	1/720 min <sup>-1</sup>			
Roda dentada molla 1	12	1/60 min <sup>-1</sup>	4		
Roda dentada molla 2	48	1/240 min <sup>-1</sup>			

Taula 3. Reduccions del tren d'engranatges

## 7.4. Dimensionat de l'escapament

L'escapament consta de tres elements: la catalina (en rosa), l'àncora (en gris) i el volant d'inèrcia (en vermell), tal i com es pot veure a la Figura 49, la Figura 50 i la Figura 51. En aquestes figures es defineixen els paràmetres geomètrics entre elements.

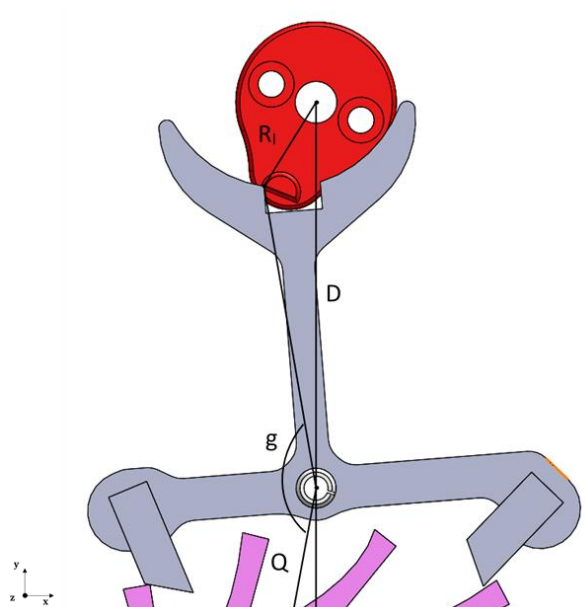


Figura 49. Paràmetres entre volant d'inèrcia i àncora

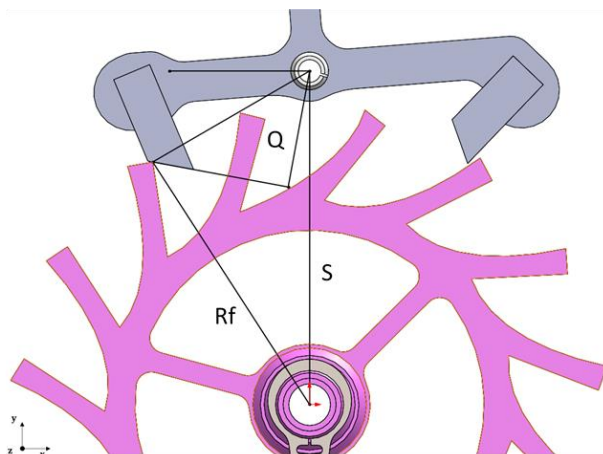


Figura 50. Paràmetres entre àncora i catalina. Palet d'entrada



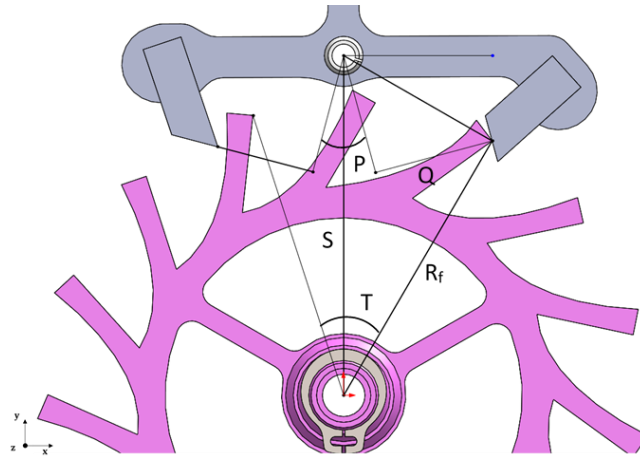


Figura 51. Paràmetres entre àncora i catalina. Palet de sortida.

Taula 4 mostra els valors dels paràmetres de l'escapament, necessaris per a poder procedir a fer una simulació de comportament del mateix:

Paràmetre	Valor
S	44 mm
$R_f$	38,02 mm
Q	15,56 mm
D	48 mm
$R_l$	12,5 mm
g	160 °
P	30 °
T	48 °

Taula 4. Valors dels paràmetres de l'escapament

Per veure un plànol del conjunt rellotge amb tots els components esmentats anteriorment es pot consultar l'ANNEX A.



## **8. Simulació dinàmica del conjunt “volant d’inèrcia – escapament – catalina”**

### **8.1. Simplificacions**

#### **8.1.1. Simplificacions en les equacions de moviment**

Per tal de simplificar les expressions de les equacions de moviment del sistema es fan un seguit de consideracions:

- El contacte entre dues parets sempre es considera el contacte entre una superfície i un punt.
- La única força de fregament que s’ha tingut en compte és la que apareix entre la catalina i l’ànchora durant la fase de bloqueig.

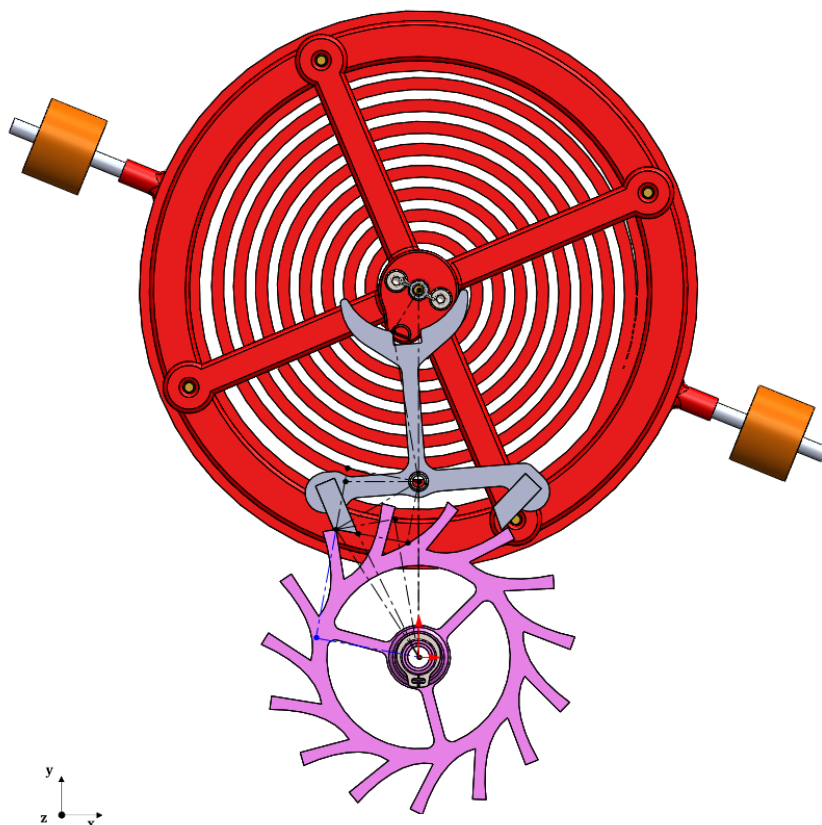
#### **8.1.2. Simplificacions en la simulació amb el programari MATLAB**

Per tal de simplificar al màxim el càlcul i simulació del moviment del sistema s’assumeix:

- De les 6 fases que es presenten a l’apartat 8.3 es simulen les 3 fases més significatives:
  - El primer moviment de balanceig lliure (fase 1).
  - El moviment amb els tres elements movent-se conjuntament (fase 4).
  - L’últim moviment de balanceig lliure (fase 6)
- La consideració anterior s’aplica tant en el mig cicle d’anada com en el mig cicle de tornada.
- En els models de les diferents fases de la simulació s’hi ha afegit amortiment per tal que la solució no divergis.

## 8.2. Relacions geomètriques

Per tal de que totes les equacions de moviment es puguin expressar respecte una sola variable (en aquest cas l'angle de rotació del volant d'inèrcia), es busquen relacions geomètriques entre els diferents components que componen l'escapament. Tal i com es mostra a la Figura 52, i com s'ha comentat anteriorment, aquests components són la catalina (en rosa), l'àncora (en gris) i el volant d'inèrcia (en vermell).



*Figura 52. Elements del sistema escapament: catalina (rosa), àncora (gris) i volant d'inèrcia (vermell)*

### 8.2.1. Àncora - Volant

Seguint el teorema del sinus i tal i com es mostra a la Figura 53, la relació que es troba entre l'angle de rotació del volant i l'àncora és:



$$R_I \cdot \sin(\beta + \rho') = D \cdot \sin(\rho') \quad (\text{Eq. 36})$$

I buscant una expressió tal que  $\beta = \beta(\rho)$ :

$$\beta = \arcsin\left[\frac{D}{R_I} \cdot \sin(\rho')\right] - \rho' \quad (\text{Eq. 37})$$

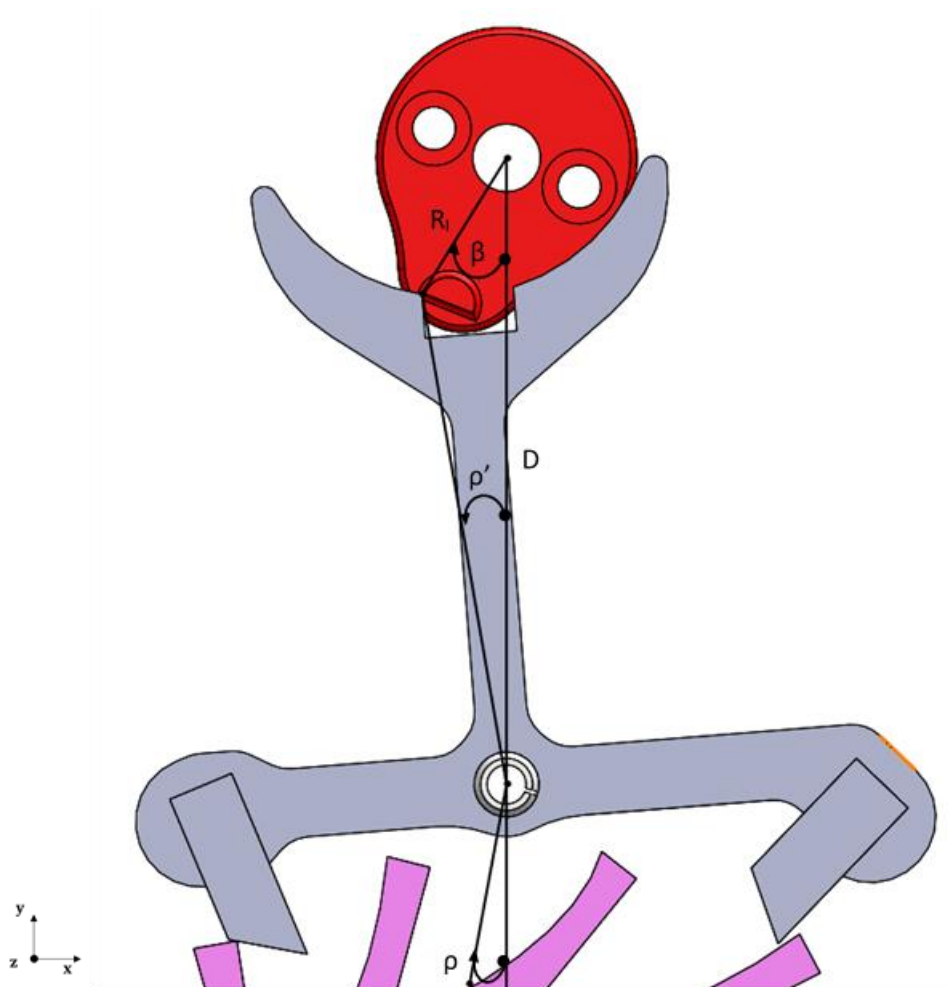


Figura 53. Relació geomètrica entre l'àncora i el volant d'inèrcia

Les expressions  $R_I$  i  $D$  són constants, mentre que  $\beta$ ,  $\rho$  i  $\rho'$  varien amb el moviment.

### 8.2.2. Catalina – Àncora

En el cas de la relació geomètrica entre la catalina i l'àncora, s'ha de tenir en compte que serà diferent en les dues meitats del cicle, degut al funcionament de l'escapament: la catalina sempre rota en la mateixa direcció mentre que l'àncora oscil·la en ambdues direccions.

En el cas de l'impuls d'entrada (o primera meitat del cicle), s'usa el subíndex  $f$  i en el cas de l'impuls de sortida (o segona meitat del cicle), s'usa el subíndex  $r$ .

En el cas de l'impuls d'entrada, les relacions són les següents (Figura 54):

$$\rho = \varphi - \alpha \quad (\text{Eq. 38})$$

$$\sin(\varphi) = \frac{Q}{R_{pe}} \quad (\text{Eq. 39})$$

$$R_f^2 = S^2 + R_{pe}^2 - 2 \cdot S \cdot R_{pe} \cdot \cos(\gamma) \quad (\text{Eq. 40})$$

$$\cos(\gamma) = \sin(\alpha) \quad (\text{Eq. 41})$$

I combinant-les:

$$\rho = \arcsin\left(\frac{Q}{R_{pe}}\right) - \arcsin\left(\frac{S^2 + R_{pe}^2 - R_f^2}{2 \cdot S \cdot R_{pe}}\right) \quad (\text{Eq. 42})$$

La relació amb l'angle  $e$  surt de l'expressió:

$$R_{pe}^2 = S^2 + R_f^2 - 2 \cdot S \cdot R_f \cdot \cos(e) \quad (\text{Eq. 43})$$

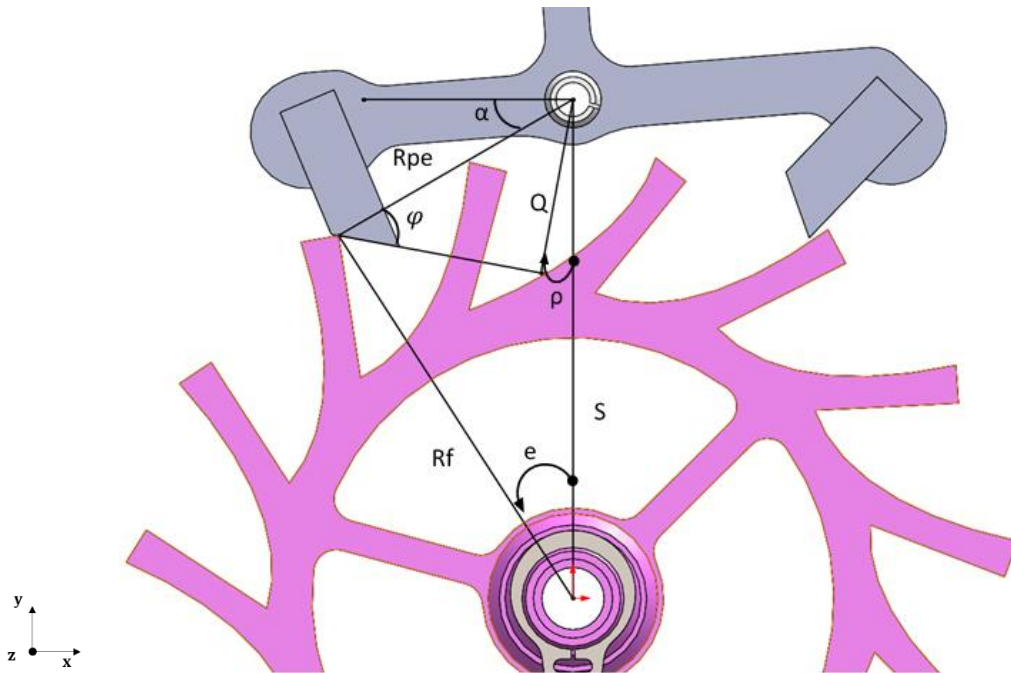


Figura 54. Relació geomètrica entre l'ancora i la catalina. Palet d'entrada

Les expressions  $R_f$ ,  $S$  i  $Q$  són constants, mentre que  $e$ ,  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\phi$  i  $R_{pe}$  varien amb el moviment.





En el cas de l'impuls de sortida, les relacions són les següents (Figura 55):

$$P - \rho = \varphi' - \alpha' \quad (\text{Eq. 44})$$

$$\cos(\varphi') = \frac{Q_r}{R_{pr}} \quad (\text{Eq. 45})$$

$$R_f^2 = S^2 + R_{pr}^2 - 2 \cdot S \cdot R_{pr} \cdot \cos(\gamma') \quad (\text{Eq. 46})$$

$$\cos(\gamma') = \sin(\alpha') \quad (\text{Eq. 47})$$

I combinant-les:

$$P - \rho = \arccos\left(\frac{Q_r}{R_{pr}}\right) - \arcsin\left(\frac{S^2 + R_{pr}^2 - R_f^2}{2 \cdot S \cdot R_{pr}}\right) \quad (\text{Eq. 48})$$

La relació amb l'angle e surt de l'expressió:

$$R_{pr}^2 = S^2 + R_f^2 - 2 \cdot S \cdot R_f \cdot \cos(T - e) \quad (\text{Eq. 49})$$

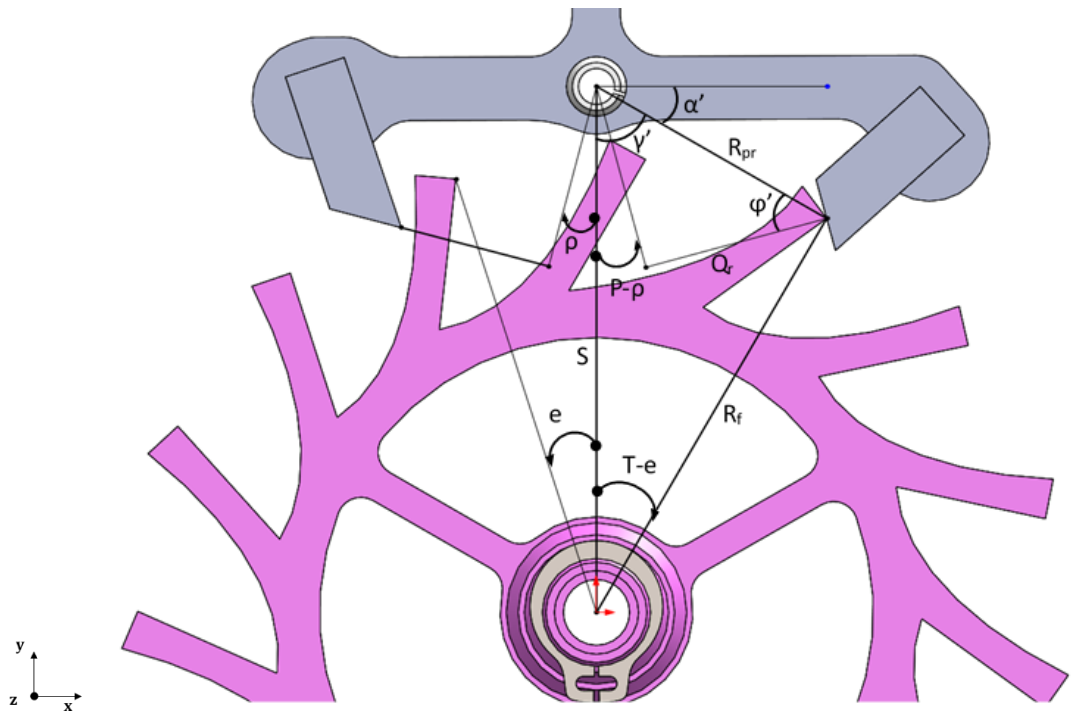


Figura 55. Relació geomètrica entre l'àncora i la catalina. Palet de sortida

Les expressions  $R_f$ ,  $S$ ,  $Q_r$ ,  $T$  i  $P$  són constants, mentre que  $e$ ,  $\rho$ ,  $\alpha'$ ,  $\gamma'$ ,  $\phi'$  i  $R_{pr}$  varien amb el moviment.

### 8.3. Equacions del moviment

Per tal de simplificar l'estudi del moviment del sistema de l'escapament, s'ha dividit la oscil·lació en dotze fases. Es considera que cada fase està representada per una equació del moviment de cada component, que es manté invariable durant aquella fase:

1. La primera fase comença a  $\beta_0$  (punt més elevat de la oscil·lació). El volant d'inèrcia es **balanceja lliurement**.
2. En l'angle  $\beta_1$  hi ha una contacte (que es considera instantània) entre el volant i l'àncora quan el pin d'impuls toca l'àncora. El **desbloqueig** de la catalina va des de  $\beta_1$  fins a  $\beta_2$ .
3. El volant d'inèrcia i l'àncora continuen rotant, mentre que la catalina accelera fins a entrar en contacte amb l'àncora. En el moment en què la catalina toca l'àncora l'angle és  $\beta_3$ .
4. Quan la catalina toca l'àncora a  $\beta_3$  es torna a produir un contacte instantani. Des de  $\beta_3$  fins a  $\beta_4$  els tres elements de l'escapament es mouen junts.
5. El volant i l'àncora continuen rotant lliurement fins que, a  $\beta_5$ , la cara de bloqueig de la catalina topa amb el palet de sortida de l'àncora.
6. El volant d'inèrcia rota lliurement fins a  $\beta_6$  (l'altre punt més elevat de la oscil·lació).

Aquí acaba la primera meitat del cicle i comença la segona:

7. El volant es balanceja lliure des de  $\beta_6$  fins a  $\beta_7$ .
8. De  $\beta_7$  a  $\beta_8$  es desbloqueja la catalina.
9. La catalina toca l'àncora a  $\beta_9$ .
10. Els tres elements de l'escapament en mouen conjuntament des de  $\beta_9$  a  $\beta_{10}$ .
11. La catalina es torna a bloquejar a  $\beta_{11}$ .
12. El volant es mou lliurement fins a  $\beta_0$ .

Per al desenvolupament de les expressions de les equacions del moviment s'usa el Teorema del Moment Cinètic.



A la Figura 56 es pot veure com s'han definit la direcció dels angles dels elements de l'escapament, tenint en compte que  $\beta$  és l'angle de gir del volant d'inèrcia,  $\rho$  és l'angle de gir de l'àncora i  $e$  és l'angle de gir de la catalina:

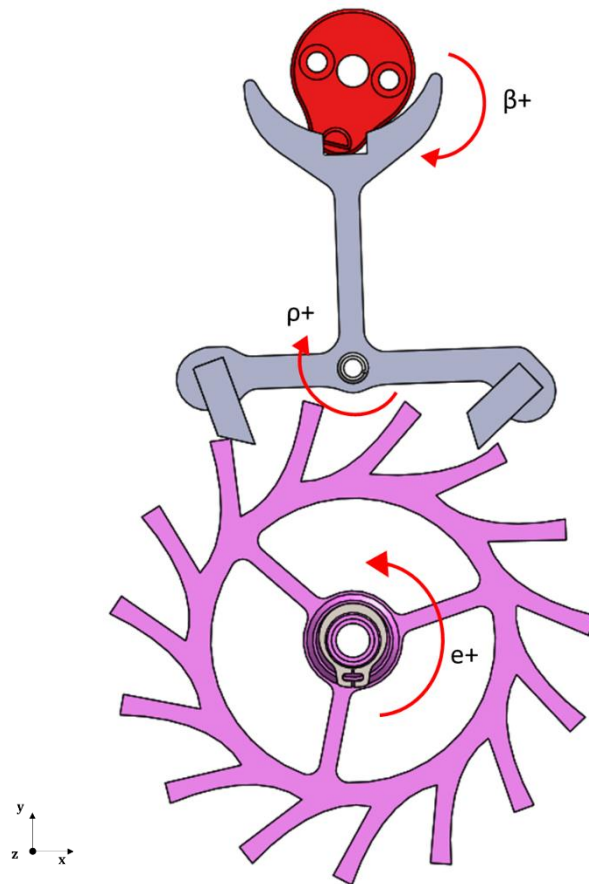


Figura 56. Esquema de la direcció dels angles de l'escapament

### 8.3.1. Fase 1

Durant el balanceig lliure del volant, s'assumeix que l'únic parell actuant sobre el volant és el parell que exerceix la molla.

L'equació del moviment queda com

$$I_B \ddot{\beta} = -K\beta \quad (\text{Eq. 50})$$

on  $I_B$  és el moment d'inèrcia del volant i  $K$  és la constant de la molla.

### 8.3.2. Fase 2

El desbloqueig de la catalina comença quan el pin d'impuls del volant toca l'àncora. En aquest punt l'angle del volant es marca com a  $\beta_1$ .  $F_{BL}$  representa la força que el volant exerceix sobre l'àncora, i  $F_{LB}$  la força de reacció de l'àncora sobre el volant.  $Y'_L$  i  $Y_B$  són les distàncies d'aquestes forces als seus respectius punts de pivotatge (Figura 57).

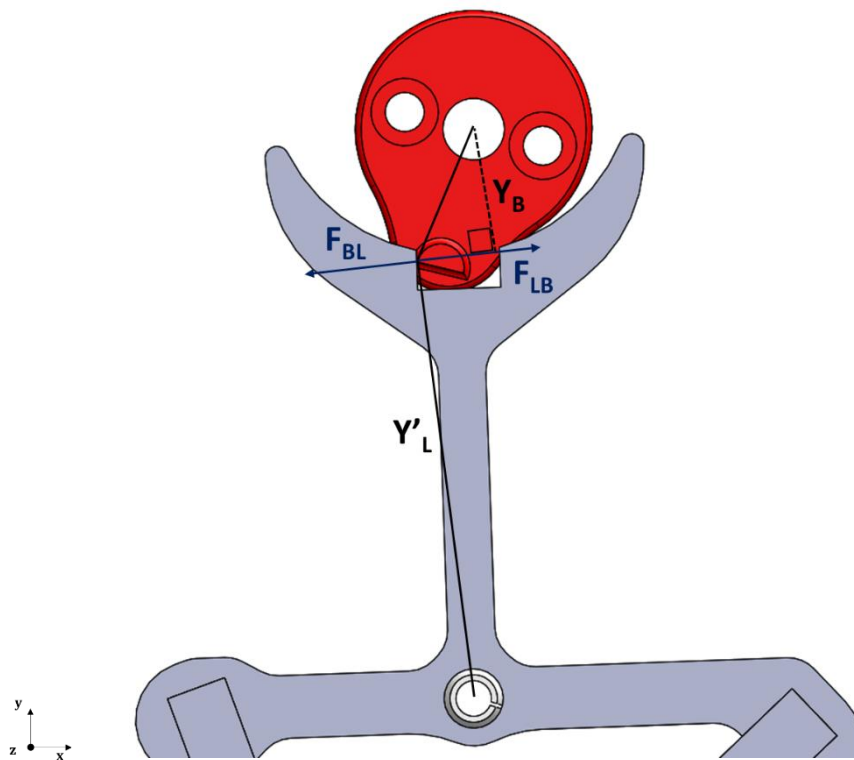


Figura 57. Diagrama de les forces de contacte entre l'àncora i el volant d'inèrcia

L'impuls al volant és:

$$\delta_B = \int Y_B(\beta) F_{LB} dt = I_B \dot{\beta}_{1a} - I_B \dot{\beta}_{1b} \quad (\text{Eq. 51})$$

on  $\dot{\beta}_{1a}$  i  $\dot{\beta}_{1b}$  representen les velocitats angulars del volant d'inèrcia després i abans (*after – before*) de la contacte, respectivament.

L'impuls a l'àncora és:



$$\delta_L = \int Y'_L(\beta) F_{BL} dt = I_L \dot{\rho}_{1a} - I_L \dot{\rho}_{1b} \quad (\text{Eq. 52})$$

on  $I_L$  és el moment d'inèrcia de l'àncora.

Combinant les dues expressions anteriors s'obté:

$$\frac{\delta_L}{\delta_B} = \frac{Y'_L(\beta)}{Y_B(\beta)} = \frac{I_L \dot{\rho}_{1a}}{I_B (\dot{\beta}_{1a} - \dot{\beta}_{1b})} \quad (\text{Eq. 53})$$

Tenint en compte que després de l'impacte l'àncora i el volant s'acoblen, es troba que:

$$Y'_L(\beta) \dot{\rho}_{1a} = -Y_B(\beta) \dot{\beta}_{1a}, \quad (\text{Eq. 54})$$

$$\frac{d\rho}{d\beta} = -\frac{Y_B(\beta)}{Y'_L(\beta)} \quad (\text{Eq. 55})$$

Combinant les equacions X i Y es pot aïllar  $\beta$  de la següent forma:

$$\dot{\beta}_{1a} = \frac{I_B}{I_B + \left(\frac{Y_B(\beta)}{Y'_L(\beta)}\right)^2 \cdot I_L} \dot{\beta}_{1b} = \frac{I_B}{I_B + X_1^2 \cdot I_L} \dot{\beta}_{1b} \quad (\text{Eq. 56})$$

$$\text{On,} \quad X_1 = \frac{Y_B(\beta)}{Y'_L(\beta)} \quad (\text{Eq. 57})$$

Per altra banda, després del contacte segueix la rotació de l'àncora i el volant d'inèrcia junts, que continua fins a aconseguir el desbloqueig de la catalina.

Si es considera el moviment que fa l'àncora, s'assumeix que els únics parells actuant sobre l'àncora durant aquesta part de la fase són el parell que provoca el pin d'impuls (en positiu), i un parell friccional ( $T_{Lf}$ ) en negatiu provocat pel contacte entre l'àncora i la cara de bloqueig de la catalina. Conseqüentment l'equació del moviment de l'àncora es pot representar com:

$$I_L \ddot{\rho} = T_{BL} - T_{Lf} \quad (\text{Eq. 58})$$

$$I_L \ddot{\rho} = Y'_L(\beta) F_{BL} - T_{Lf} \quad (\text{Eq. 59})$$

En el cas del volant d'inèrcia, s'ha d'afegir a l'expressió del moviment lliure del mateix un parell degut al contacte amb l'àncora. L'equació és:

$$I_B \ddot{\beta} = -K\beta + Y_B(\beta)F_{LB} \quad (Eq. 60)$$

Considerant que  $F_{BL}=F_{LB}$  i combinant les expressions anteriors, l'equació del moviment pot escriure's com:

$$I_1 \ddot{\beta} + \frac{1}{2} I_1 \dot{\beta} + K\beta = X \cdot T_{Lf} \quad (Eq. 61)$$

$$\text{On,} \quad I_1 = I_B + X^2 \cdot I_L \quad (Eq. 62)$$

$$X = \frac{Y_B(\beta)}{Y'_L(\beta)} \quad (Eq. 63)$$

### 8.3.3. Fase 3

En l'instant del desbloqueig, l'àncora i el volant tenen una velocitat, mentre que la catalina està parada. Aquesta situació provoca que l'àncora i el volant avancin i la catalina acceleri fins a atrapar-los, moment en el que començarà la fase d'impuls (o fase 4). La catalina, doncs, es veu accelerada degut a l'acció del parell,  $T_a$ , provinent de la molla que emmagatzema energia del rellotge.

L'equació del moviment de la catalina durant aquest període és:

$$I_E \ddot{\epsilon} = -T_a \quad (Eq. 64)$$

El signe negatiu és degut a com s'ha definit l'angle  $\epsilon$ , ja que el parell va en una direcció que fa disminuir aquest angle.

L'equació del moviment de l'àncora i el volant és igual a l'equació del moviment de la fase anterior, a excepció del parell friccional que afectava a l'àncora degut al contacte amb la catalina.



$$I_1 \ddot{\beta} + \frac{1}{2} \dot{I}_1 \dot{\beta} + K\beta = 0 \quad (\text{Eq. 65})$$

#### 8.3.4. Fase 4

En el moment en que la catalina entra en contacte amb l'àncora, es considera que hi ha un contacte instantani, en el que hi participen les forces  $F_{EL}$  i  $F_{LE}$ . La força  $F_{EL}$  es considera la força exercida sobre l'àncora per la catalina, i  $F_{LE}$  la força de reacció a l'anterior.  $Y_L$  i  $Y_E$  són les distàncies d'aquestes forces als seus respectius punts de pivotatge (Figura 58). L'equació del moviment dels components es pot escriure com:

$$I_E \ddot{e} = -T_a + Y_E(e) F_{LE} \quad (\text{Eq. 66})$$

$$I_L \ddot{\rho} = Y_L(e) F_{EL} - Y'_L(\beta) F_{BL} \quad (\text{Eq. 67})$$

$$I_B \ddot{\beta} = -Y_B(\beta) F_{LB} - K\beta \quad (\text{Eq. 68})$$

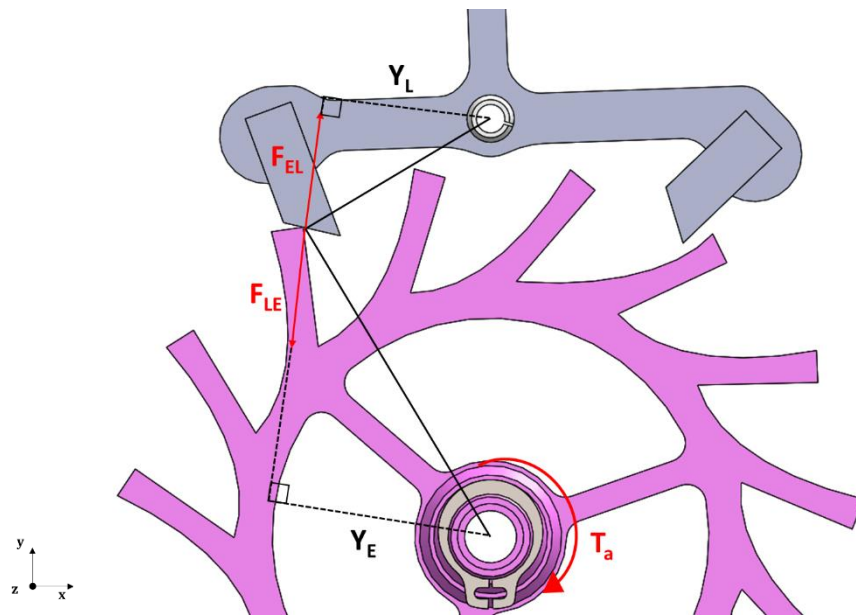


Figura 58. Diagrama de les forces de contacte entre la catalina i l'àncora

Tenint en compte que després de l'impacte l'àncora i la catalina s'acoblen, es troba que:

$$Y_E(e)\dot{e} = -Y_L(e)\dot{\rho} \quad (\text{Eq. 69})$$

$$-Y_L(e)\dot{\rho} = -Y_B(\beta)\dot{\beta} \quad (\text{Eq. 70})$$

Combinant les equacions anteriors es pot trobar una sola expressió:

$$I_1\ddot{\beta} + K\beta + X \cdot Z_f \cdot T_a = -X \cdot Z_f \cdot I_E \cdot \ddot{e} \quad (\text{Eq. 71})$$

On,

$$Z_f = \frac{Y_L}{Y_E} \quad (\text{Eq. 72})$$

L'expressió Z varia entre la primera meitat del cicle i la segona. El subíndex *f* fa referència a la primera meitat del cicle (de la fase 1 a la fase 6) i el subíndex *r* fa referència a la segona meitat del cicle (de la fase 7 a la fase 12). La funció Z( $\beta$ ) es deriva a l'apèndix A.

Si s'integra l'expressió anterior tenint en compte que el contacte és instantani, i per tant que la integració dels termes que inclouen  $T_a$  i  $\beta$  es poden negligir, s'extreu:

$$\dot{\beta}_{3a} = \frac{I_{13}\dot{\beta}_{3b} + X_3 \cdot Z_{f3} \cdot I_E \cdot \dot{e}_{3b}}{I_B + X_3^2 \cdot I_L + X_3^2 \cdot Z_{f3}^2 \cdot I_E} = \frac{I_{13}\dot{\beta}_{3b} + X_3 \cdot Z_{f3} \cdot I_E \cdot \dot{e}_{3b}}{I_{23}} \quad (\text{Eq. 73})$$

$$I_{23} = I_B + X_3^2 \cdot I_L + X_3^2 \cdot Z_{f3}^2 \cdot I_E \quad (\text{Eq. 74})$$

Ara que el palet d'entrada està en contacte amb la cara d'impuls de la catalina, aquesta dona impuls cap al volant d'inèrcia a través de l'àncora. Aquest impuls proporciona energia al volant d'inèrcia per compensar les pèrdues que aquest pateix i per mantenir el moviment d'aquest component.

Durant el període d'impuls les equacions del moviment dels components (junts) són iguals que els donats a la fase anterior. Si es combinen per tal de que l'equació del moviment només depengui de la variable  $\beta$ , resulta:

$$I_2\ddot{\beta} + \frac{1}{2}I_2\dot{\beta} + K\beta = -X \cdot Z_f \cdot T_a \quad (\text{Eq. 75})$$





$$\text{On,} \quad I_2 = I_B + X^2 \cdot I_L + X^2 \cdot Z_f^2 \cdot I_E \quad (\text{Eq. 76})$$

$$X = \frac{Y_B(\beta)}{Y'_L(\beta)} \quad (\text{Eq. 77})$$

$$Z_f = \frac{Y_L(e)}{Y_E(e)} \quad (\text{Eq. 78})$$

### 8.3.5. Fase 5

Quan el palet d'entrada de l'àncora deixa d'estar en contacte amb la cara d'impuls de la catalina, el palet de sortida de l'àncora entra en contacte amb la següent dent d'aquesta. En aquest moment l'àncora para de girar, mentre que la catalina té un petit desplaçament addicional per tant de bloquejar el palet de sortida contra la cara de bloqueig de la seva dent. Mentrestant, el volant rota lliurement. Per a aquesta fase les equacions són:

$$I_E \ddot{e} = -T_a \quad (\text{Eq. 79})$$

$$\ddot{\rho} = 0 \quad (\text{Eq. 80})$$

$$I_B \ddot{\beta} = -K\beta \quad (\text{Eq. 81})$$

### 8.3.6. Fase 6

En aquesta fase la catalina i l'àncora estan parats, mentre que el volant d'inèrcia segueix girant fins a arribar a la seva posició més alta:

$$I_B \ddot{\beta} = -K\beta \quad (\text{Eq. 82})$$

La primera meitat del cicle ha acabat.

### 8.3.7. Equacions de moviment de la segona meitat del cicle

En la segona meitat del cicle, varia el signe en algunes expressions de les equacions. A la següent taula (Taula 5) es mostra un resum de les equacions de moviment en cada fase:

	EQUACIÓ VOLANT	EQUACIÓ ÀNCORA	EQUACIÓ CATALINA
<b>FASE 1</b>	$I_B \ddot{\beta} = -K\beta$	-	-
<b>FASE 2</b>	$I_B \ddot{\beta} = -K\beta + Y_B F_{LB}$	$I_L \ddot{\rho} = Y'_L F_{BL} - T_{Lf}$	-
<b>FASE 3</b>	$I_1 \ddot{\beta} + \frac{1}{2} I_1 \dot{\beta} + K\beta = 0$		$I_E \ddot{e} = -T_a$
<b>FASE 4</b>	$I_B \ddot{\beta} = -Y_B F_{LB} - K\beta$	$I_L \ddot{\rho} = Y_L F_{EL} - Y'_L F_{BL}$	$I_E \ddot{e} = -T_a + Y_E F_{LE}$
<b>FASE 5</b>	$I_B \ddot{\beta} = -K\beta$	$\ddot{\rho} = 0$	$I_E \ddot{e} = -T_a$
<b>FASE 6</b>	$I_B \ddot{\beta} = -K\beta$	-	-
<b>FASE 7</b>	$I_B \ddot{\beta} = -K\beta$	-	-
<b>FASE 8</b>	$I_B \ddot{\beta} = -K\beta + Y_B F_{LB}$	$I_L \ddot{\rho} = Y'_L F_{BL} - T_{Lf}$	-
<b>FASE 9</b>	$I_1 \ddot{\beta} + \frac{1}{2} I_1 \dot{\beta} + K\beta = 0$		$I_E \ddot{e} = -T_a$
<b>FASE 10</b>	$I_B \ddot{\beta} = Y_B F_{LB} - K\beta$	$I_L \ddot{\rho} = -Y_L F_{EL} + Y'_L F_{BL}$	$I_E \ddot{e} = -T_a + Y_E F_{LE}$
<b>FASE 11</b>	$I_B \ddot{\beta} = -K\beta$	$\ddot{\rho} = 0$	$I_E \ddot{e} = -T_a$
<b>FASE 12</b>	$I_B \ddot{\beta} = -K\beta$	-	-

Taula 5. Resum de les equacions de moviment en cada fase



## 8.4. Expressions del model

Per tal de resoldre les equacions del moviment presentades en l'apartat anterior, cal tenir en compte la definició de les següents expressions.

La distància entre l'eix de l'àncora i la força de reacció que aquesta rep del contacte amb el volant d'inèrcia es pot expressar com:

$$Y_L'^2 = R_I^2 + D^2 - 2 \cdot D \cdot R_I \cdot \cos(\beta) \quad (\text{Eq. 83})$$

$$Y_L' = \sqrt{R_I^2 + D^2 - 2 \cdot D \cdot R_I \cdot \cos(\beta)} \quad (\text{Eq. 84})$$

La distància entre l'eix del volant d'inèrcia i la força que aquest rep del contacte amb l'àncora es pot expressar com:

$$Y_L' \cdot \cos(\delta) \cdot R_I = D \cdot \cos(\beta) \quad (\text{Eq. 85})$$

$$Y_B = \cos(\delta) \cdot R_I \quad (\text{Eq. 86})$$

$$Y_B = (D \cdot \cos(\beta) - R_I) \cdot \frac{R_I}{Y_L'} \quad (\text{Eq. 87})$$

La distància entre l'eix de l'àncora i la força que aquesta rep del contacte amb la catalina en el palet d'entrada es pot expressar com:

$$Y_L = \sqrt{R_{pe}^2 - Q^2} \quad (\text{Eq. 88})$$

$$\text{On,} \quad R_{pe}^2 = S^2 + R_f^2 - 2 \cdot S \cdot R_f \cdot \cos(e) \quad (\text{Eq. 89})$$

La distància entre l'eix de la catalina i la força de reacció que aquesta rep del contacte amb l'àncora en el palet d'entrada es pot expressar com:

$$Y_E = \cos \left[ 180^\circ - e - \gamma - \arcsin \left( \frac{Q}{R_{pe}} \right) \right] \cdot R_f \quad (\text{Eq. 90})$$

$$\text{On,} \quad \gamma = \arccos\left(\frac{S^2 + R_{pe}^2 - R_f^2}{2 \cdot S \cdot R_{pe}}\right) \quad (\text{Eq. 91})$$

La distància entre l'eix de l'àncora i la força que aquesta rep del contacte amb la catalina en el palet de sortida es pot expressar com:

$$Y_L = \sqrt{R_{pr}^2 - Q^2} \quad (\text{Eq. 92})$$

$$\text{On,} \quad R_{pr}^2 = S^2 + R_f^2 - 2 \cdot S \cdot R_f \cdot \cos(T - e) \quad (\text{Eq. 93})$$

La distància entre l'eix de la catalina i la força de reacció que aquesta rep del contacte amb l'àncora en el palet de sortida es pot expressar com:

$$Y_E = \sin\left[180^\circ - (T - e) - \gamma' - \arccos\left(\frac{Q}{R_{pe}}\right)\right] \cdot R_f \quad (\text{Eq. 94})$$

$$\text{On,} \quad \gamma' = \arccos\left(\frac{S^2 + R_{pr}^2 - R_f^2}{2 \cdot S \cdot R_{pr}}\right) \quad (\text{Eq. 95})$$



## 8.5. Simulació del model

Com es comenta a l'apartat 8.1.2 per a la simulació amb programari Simulink s'han tingut en compte les sis fases més importants (tres en el primer mig cicle i tres en el segon mig cicle). Aquestes són la Fase 1, la Fase 4, la Fase 6, la Fase 7, la Fase 10 i la Fase 12.

La primera, la sisena, la setena i la dotzena fase segueixen la mateixa equació de moviment (Eq. 50). La quarta fase segueix l'equació de moviment presentada a l'apartat 8.3.4 (Eq. 75), i la desena fase es presenta a la Taula 5 de l'apartat 8.3.7. L'estructura de la simulació de la Fase 4 i la Fase 10 és la que es representa a la Figura 59.

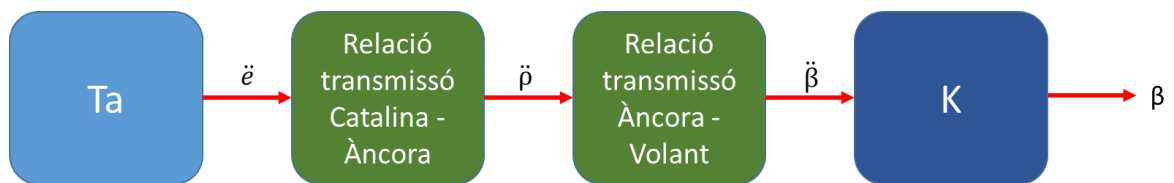


Figura 59. Estructura de la simulació per la Fase 4 i la Fase 10

Per tal de modelitzar l'equació de moviment lliure (Eq. 50), s'ha aïllat l'acceleració angular del volant tal i com es presenta a continuació (Eq. 96) i s'ha creat el diagrama de blocs de la Figura 60.

$$\ddot{\beta} = \frac{-K\beta - c\dot{\beta}}{I_B} \quad (\text{Eq. 96})$$

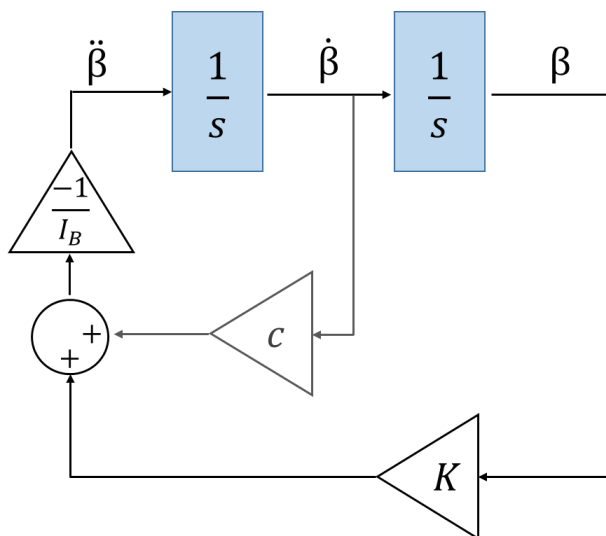


Figura 60. Diagrama de blocs del balanceig lliure

Per a la modelització de l'equació de moviment de la Fase 4 s'ha aïllat també l'acceleració angular del volant (Eq. 97):

$$\ddot{\beta} = \frac{-X \cdot Z_f T_a - \frac{1}{2} \dot{I}_2 \dot{\beta} - K \beta}{I_2} \quad (\text{Eq. 97})$$

On,

$$I_2 = I_B + X^2 \cdot I_L + X^2 \cdot Z_f^2 \cdot I_E \quad (\text{Eq. 98})$$

I s'ha creat el següent diagrama de blocs (Figura 61):

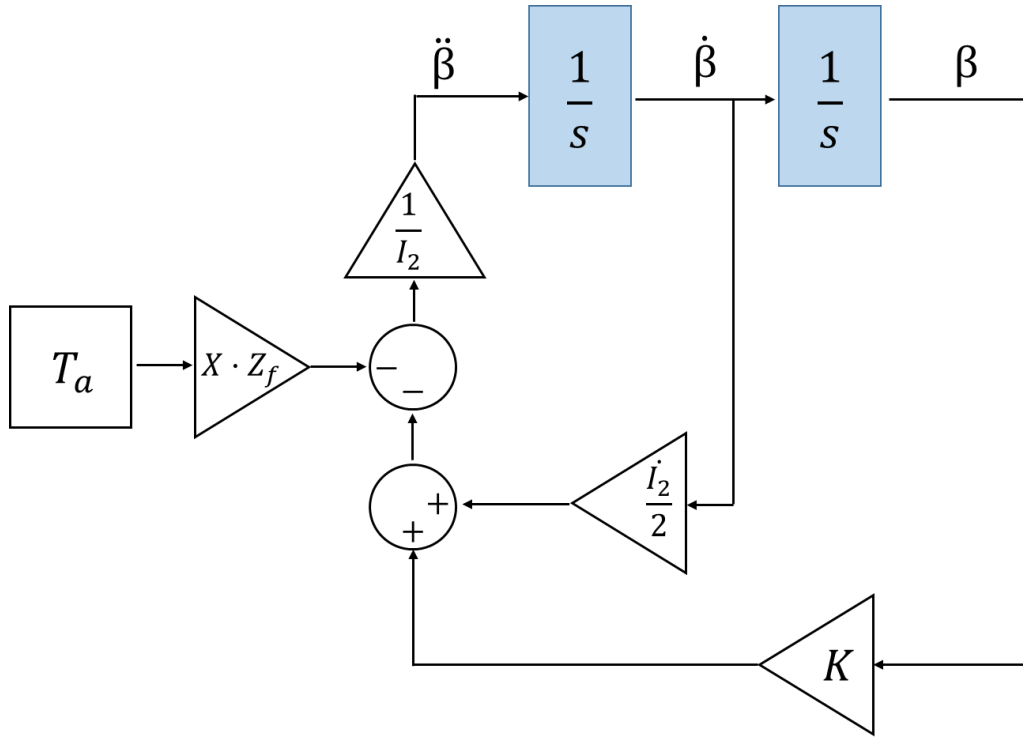


Figura 61. Diagrama de blocs de la Fase 4

Per a la modelització de l'equació de moviment de la Fase 10 s'ha aïllat també l'acceleració angular del volant (Eq. 99):

$$\ddot{\beta} = \frac{X \cdot Z_f T_a - \frac{1}{2} \dot{I}_3 \dot{\beta} - K \beta}{I_3} \quad (\text{Eq. 99})$$

On,

$$I_3 = I_B - X^2 \cdot I_L - X^2 \cdot Z_f^2 \cdot I_E \quad (\text{Eq. 100})$$



I s'ha creat el següent diagrama de blocs (Figura 62):

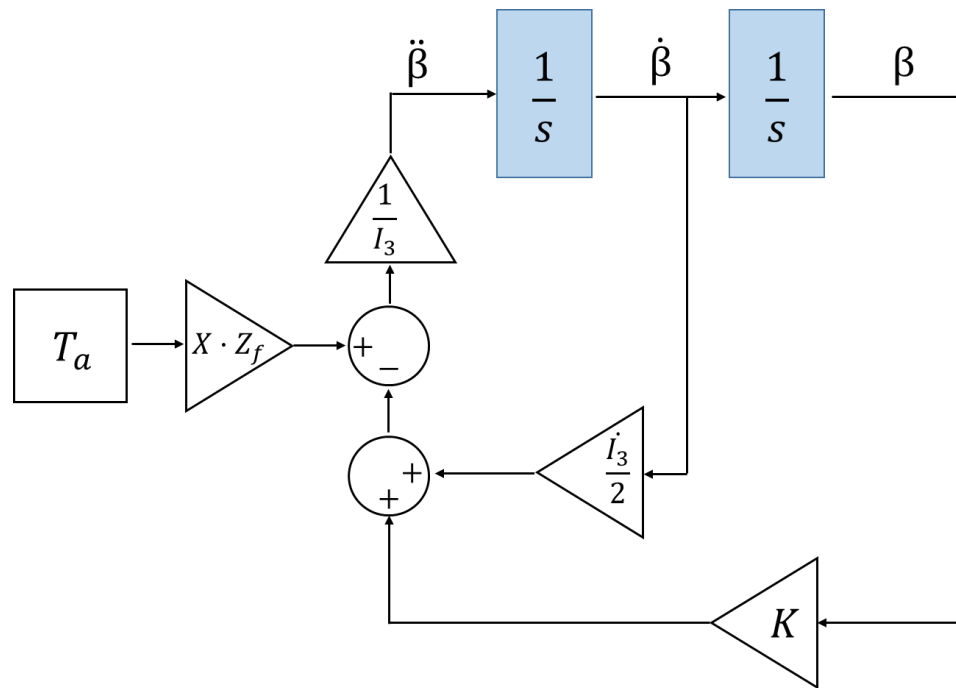
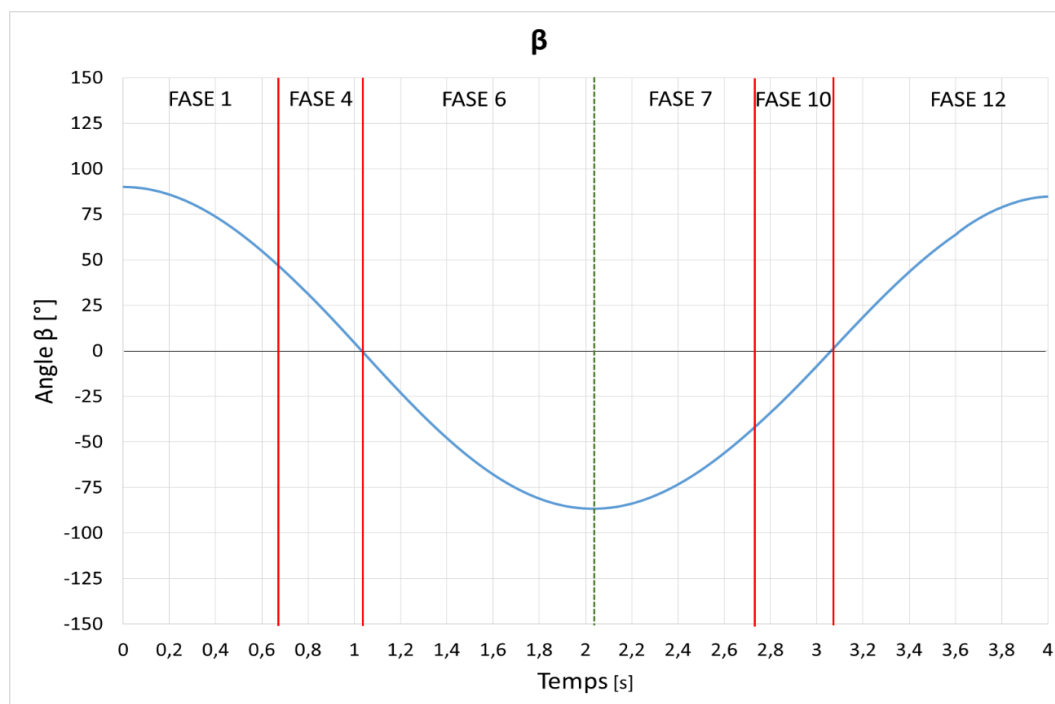


Figura 62. Diagrama de blocs de la Fase 10

Per trobar més detalls sobre l'estructura del model de simulació en SIMULINK es pot consultar l'ANNEX B.

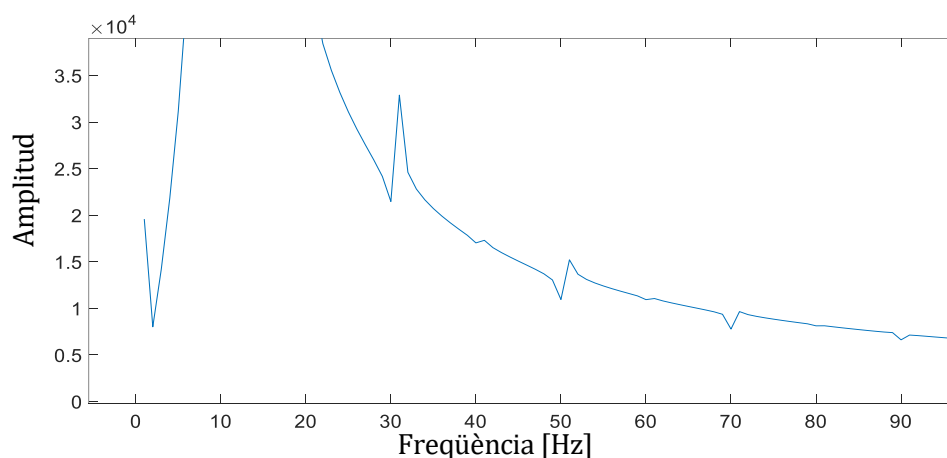
### 8.5.1. Resultats de la simulació del model

El mostra un cicle de la simulació. El Gràfic 6 representa l'angle del volant  $\beta$ , que té una forma semblant a una funció harmònica. Durant aquest cicle el model passa per les fases comentades anteriorment tal i com es representa a continuació:



Gràfic 6. Angle  $\beta$  vs. Temps durant un cicle del model

Per tal de veure quina influència té cada fase en el resultat final es pot fer una Transformada de Fourier d'una finestra del senyal de sortida. El Gràfic 7 mostra els harmònics del moviment oscil·lant de l'angle  $\beta$ .

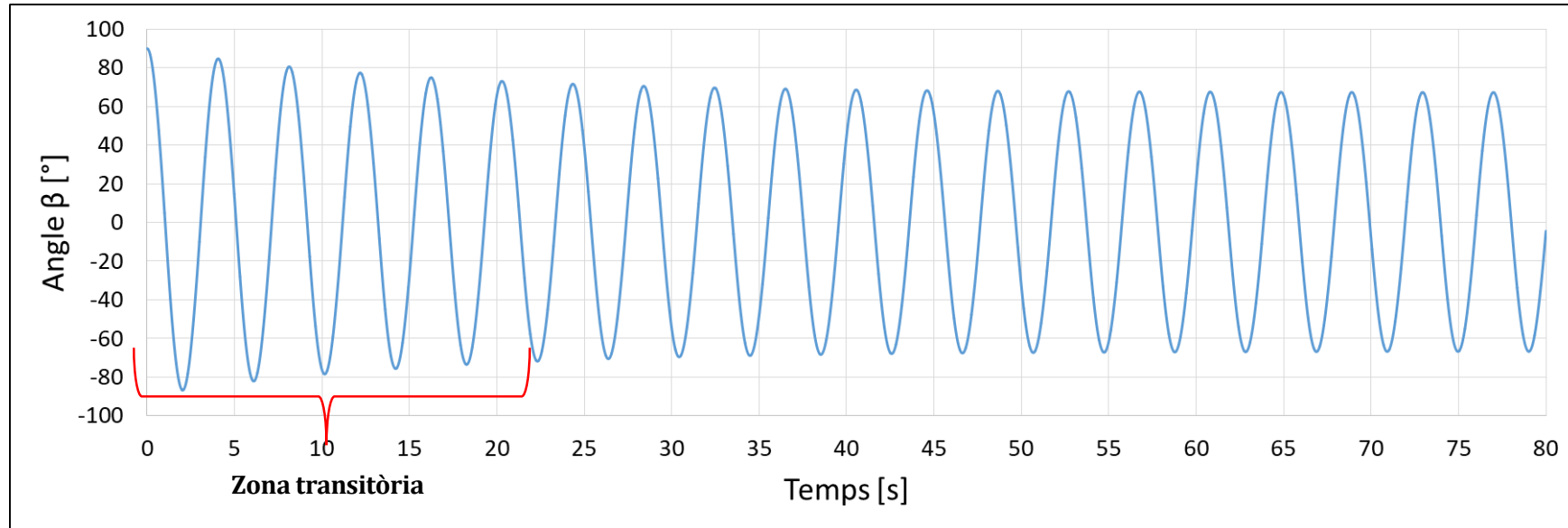


Gràfic 7. Transformada de Fourier de la senyal  $\beta$



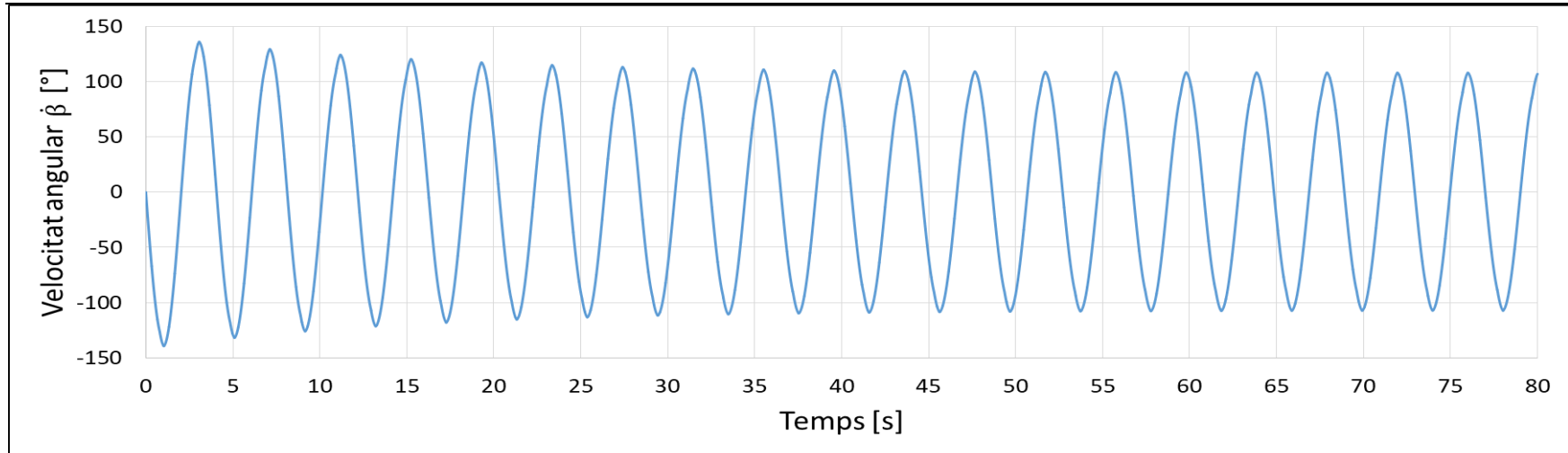


Si es simulen diversos cicles seguits, tal i com es representa al Gràfic 8, es pot veure com el model passa per una fase transitòria abans d'estabilitzar-se i arribar a la seva fase estacionària. Els gràfics presentats anteriorment (Gràfic 6 i Gràfic 7), s'han extret d'un cicle de la fase estacionària, per tal de no falsejar el resultat.

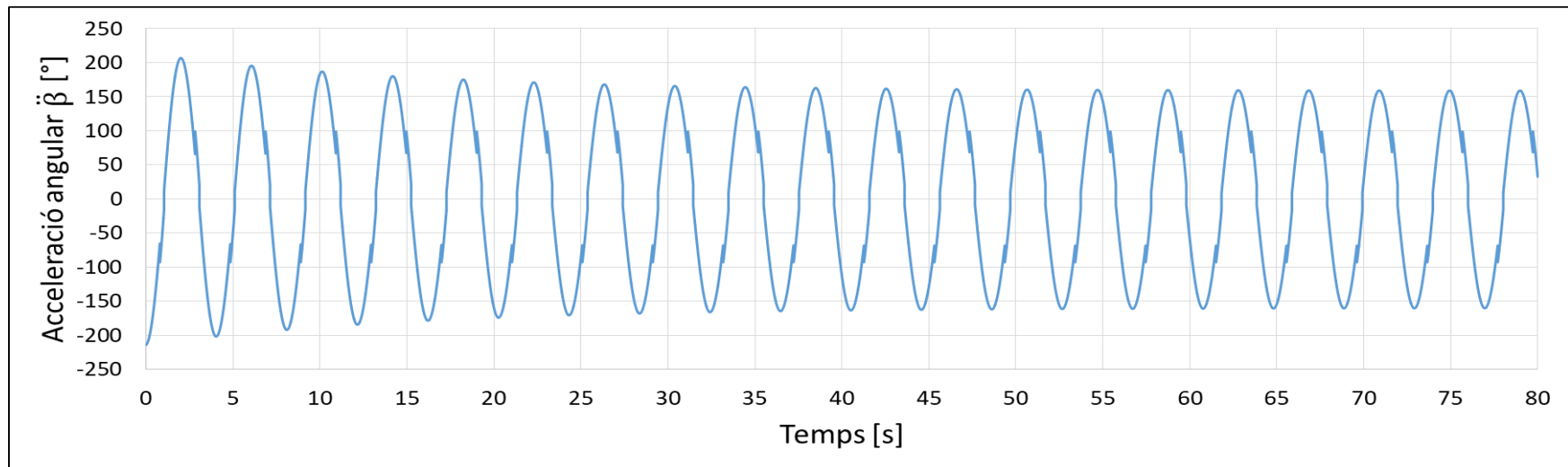


Gràfic 8. Simulació de l'evolució de l'angle  $\beta$

En el Gràfic 9 i en el Gràfic 10 es pot observar el mateix fenomen en l'evolució de la velocitat angular i l'acceleració angular:



Gràfic 9. Simulació de l'evolució de la velocitat angular  $\dot{\beta}$



Gràfic 10. Simulació de l'evolució de l'acceleració angular  $\ddot{\beta}$

## 9. Planificació del projecte

La planificació del projecte es mostra a la Taula 6:

MASTERPLAN										
Activitat	Inici	Fi		Des.	Gen.	Feb.	Mar.	Abr.	Maig	Juny
<b>RECERCA</b>	04/12/2017	09/03/2018	96 d							
Transmissió epicicloïdal	04/12/2017	15/12/2017	12 d							
Mecanisme d'un rellotge	15/12/2017	29/12/2017	15 d							
Escapaments de rellotges	29/12/2017	07/02/2018	41 d							
Sistemes oscil·lants	03/02/2018	15/02/2018	13 d							
Molles	12/02/2018	22/02/2018	11 d							
Programari Simulink	22/02/2018	09/03/2018	16 d							
<b>DISSENY</b>	20/02/2018	06/05/2018	76 d							
Càlcul del tren d'engranatges	20/02/2018	28/02/2018	9 d							
Càlcul de la molla	28/02/2018	16/03/2018	17 d							
Dimensionament general	16/03/2018	15/04/2018	31 d							
Dimensionat de l'escapament	15/04/2018	06/05/2018	22 d							
<b>SIMULACIÓ</b>	23/04/2018	04/06/2018	43 d							
Relacions geomètriques	23/04/2018	07/05/2018	15 d							
Equacions del moviment	07/05/2018	18/05/2018	12 d							
Model de Simulink	18/05/2018	28/05/2018	11 d							
Simulacions	28/05/2018	04/06/2018	8 d							
<b>REDACCIÓ MEMÒRIA</b>	01/02/2018	17/02/2018	17 d							

Taula 6. Planificació general del projecte



## 10. Estudi econòmic

L'estudi econòmic del projecte es divideix en dues parts: aquells costos derivats del disseny del producte i elaboració de la memòria i aquells costos derivats de la fabricació del producte.

### 10.1.Desenvolupament del projecte

El cost personal es desglossa a la Taula 7:

Activitat	Preu per hora	Hores dedicades	Cost
Recerca	45€	130	5.850 €
Disseny	45 €	110	4.950 €
Simulació	45 €	110	4.950 €
Redacció	25 €	50	1.250 €
<b>TOTAL</b>		<b>400h</b>	<b>17.000 €</b>

*Taula 7. Cost de recursos humans*

La Taula 8 resumeix el cost de tots els elements usats per al correcte desenvolupament del projecte però que no formen part de l'estructura principal del mateix:

Concepte	Preu unitat	Amortització
Ordinador	1000 €	500 €
• SolidWorks	9800 €	300 €
• Matlab	50000 €	200 €
• Microsoft Office	600 €	100 €
<b>TOTAL</b>		<b>1.100 €</b>

*Taula 8. Costos secundaris de la fase de disseny*

## 10.2.Fabricació del prototip

La Taula 9 resumeix el cost dels components del prototip fabricats en FDM (impressió 3D):

Descripció	Subsistema	Material	Pes (g)	Cost del material <sup>1</sup> (€)	Temps de fabricació	Cost de fabricació <sup>2</sup> (€)	Unitats	Cost total (€)
Xassís posterior	Estructura	ABS	137	4,59 €	12h 05min	11,38 €	1	15,97 €
Corona 1-esfera	Estructura	ABS	80	2,69 €	8h 42min	8,19 €	1	10,88 €
Corona 2	Estructura	ABS	105	3,53 €	10h 20min	9,73 €	1	13,25 €
Suport eix àncora	Estructura	ABS	43	1,46 €	5h 15min	4,94 €	1	6,41 €
Eix molla	Molla	ABS	4	0,17 €	10min	0,16 €	1	0,32 €
Roda dentada cadell	Molla	ABS	3	0,13 €	11min	0,17 €	1	0,31 €
Gallet	Molla	ABS	1	0,07 €	8min	0,13 €	1	0,19 €
Barrilet	Molla	ABS	5	0,20 €	15min	0,24 €	1	0,43 €
Engranatge 1	Molla	ABS	8	0,30 €	1h 16min	1,19 €	1	1,49 €
Engranatge 2	Molla	ABS	4	0,17 €	22min	0,35 €	1	0,51 €
Espaiador	Molla	ABS	0,5	0,05 €	3 min	0,05 €	2	0,10 €
Tapa rodaments	Molla	ABS	0,89	0,06 €	6min	0,09 €	1	0,16 €
Catalina	Escapament	ABS	8,73	0,32 €	1h 27min	1,37 €	1	1,69 €

<sup>1</sup> El cost del material es calcula tenint en compte que una bobina d'ABS de 750g val 24,95€. Es suma 1g de material a totes les peces per al purgat de l'extrusor abans de l'inici de la impressió.

<sup>2</sup> Es considera que la vida útil de la màquina és de 3650h i que aquesta ha valgut 2655€. S'hi suma el cost proporcional de les hores de llum i de consumibles.

Àncora	Escapament	ABS	3	0,13 €	26min	0,41 €	1	0,54 €
Espaiador	Escapament	ABS	0,1	0,04 €	3min	0,05 €	1	0,08 €
Molla	Volant	ABS	55	1,86 €	8h 14min	7,75 €	1	9,61 €
Estructura circular	Volant	ABS	27	0,93 €	2h 45min	2,59 €	1	3,52 €
Pin d'impuls	Volant	ABS	0,63	0,05 €	5min	0,08 €	1	0,13 €
Sol etapa 1	Tren d'engranatges	ABS	4,71	0,19 €	30min	0,47 €	1	0,66 €
Planeta etapa 1	Tren d'engranatges	ABS	8,11	0,30 €	1h 6min	1,04 €	3	1,34 €
Porta-satèl·lits etapa 1	Tren d'engranatges	ABS	4,26	0,17 €	18min	0,28 €	1	0,46 €
Sol etapa 2	Tren d'engranatges	ABS	1,2	0,07 €	10min	0,16 €	1	0,23 €
Planeta etapa 2	Tren d'engranatges	ABS	9,08	0,34 €	1h 45min	1,65 €	2	1,98 €
Porta-satèl·lits etapa 2	Tren d'engranatges	ABS	2	0,10 €	18min	0,28 €	1	0,38 €
Sol etapa 3	Tren d'engranatges	ABS	1	0,07 €	10min	0,16 €	1	0,22 €
Planeta etapa 3	Tren d'engranatges	ABS	7,61	0,29 €	55min	0,86 €	2	1,15 €
Porta-satèl·lits etapa 3	Tren d'engranatges	ABS	1,85	0,09 €	18min	0,28 €	1	0,38 €
Agulla horària	Tren d'engranatges	ABS	0,82	0,06 €	6min	0,09 €	1	0,15 €
Agulla minutera	Tren d'engranatges	ABS	0,89	0,06 €	6min	0,09 €	1	0,16 €
Espaiador	Tren d'engranatges	ABS	0,1	0,04 €	3min	0,05 €	2	0,08 €
Tapa rodaments	Tren d'engranatges	ABS	0,89	0,06 €	6min	0,09 €	1	0,16 €
Clau	-	ABS	10,43	0,38 €	2h 05min	1,96 €	1	2,34 €
<b>TOTAL</b>								<b>75,30 €</b>

Taula 9. Cost dels components fabricats en FDM

La Taula 10 resumeix el cost dels components comercials:

Descripció	DIN	Marca	Referència fabricant	Cost unitari (€)	Unitats	Cost total (€)
Rodament rígid de boles	DIN625	SKF	* 625	6,22 €	2	12,44 €
Rodament rígid de boles	DIN625	SKF	618/5	2,84 €	5	14,20 €
Coixinet de fricció	-	SKF	PCM 050705	0,75 €	10	7,50 €
Molla de torsió		LESJÖFORS	SCS-0909	7,58 €	1	7,58 €
Barra circular llautó 3mm	-	-	-	2,09 €/m	0,2m	0,42 €
Barra circular llautó 5mm	-	-	-	2,73€/m	0,1m	0,27 €
Passador elàstic d'aleta	DIN94	WURTH	0470 16 16	0,02 €	3	0,06 €
Passador elàstic d'aleta	DIN94	WURTH	0470 1 16 5	0,02 €	4	0,06 €
Circlips arbres	DIN471	Norelem	07330-050600	0,12 €	2	0,24 €
Circlips arbres	DIN471	Norelem	07330-080800	0,12 €	3	0,36 €
Circlips E-type	DIN6799	Norelem	07332-0400	0,17 €	7	1,19 €
Cargol Allen cap baix M3	DIN 7984	-	-	0,18 €	6	1,08 €
Cargol Allen cap baix M4	DIN 7984	-	-	0,18 €	1	0,18 €
<b>TOTAL</b>						<b>45,58 €</b>

*Taula 10. Cost dels components comercials del prototip*

El preu total dels components del rellotge és de 120,88€.



# 11. Impacte ambiental

## 11.1. Impressió en 3D

Per tal de mesurar la “petjada ecològica” de la tecnologia de impressió 3D s’han de tenir en compte diversos factors: l’escala de producció, els materials i el cicle de vida dels productes fabricats.

Un estudi de Cuboyo realitzat l’any 2013 compara la producció convencional basada en la injecció de plàstic en motlles amb la impressió 3D. El seu veredicté és que l’impacte ambiental de la impressió 3D és menor en volums de producció inferiors a 300 rèpliques.

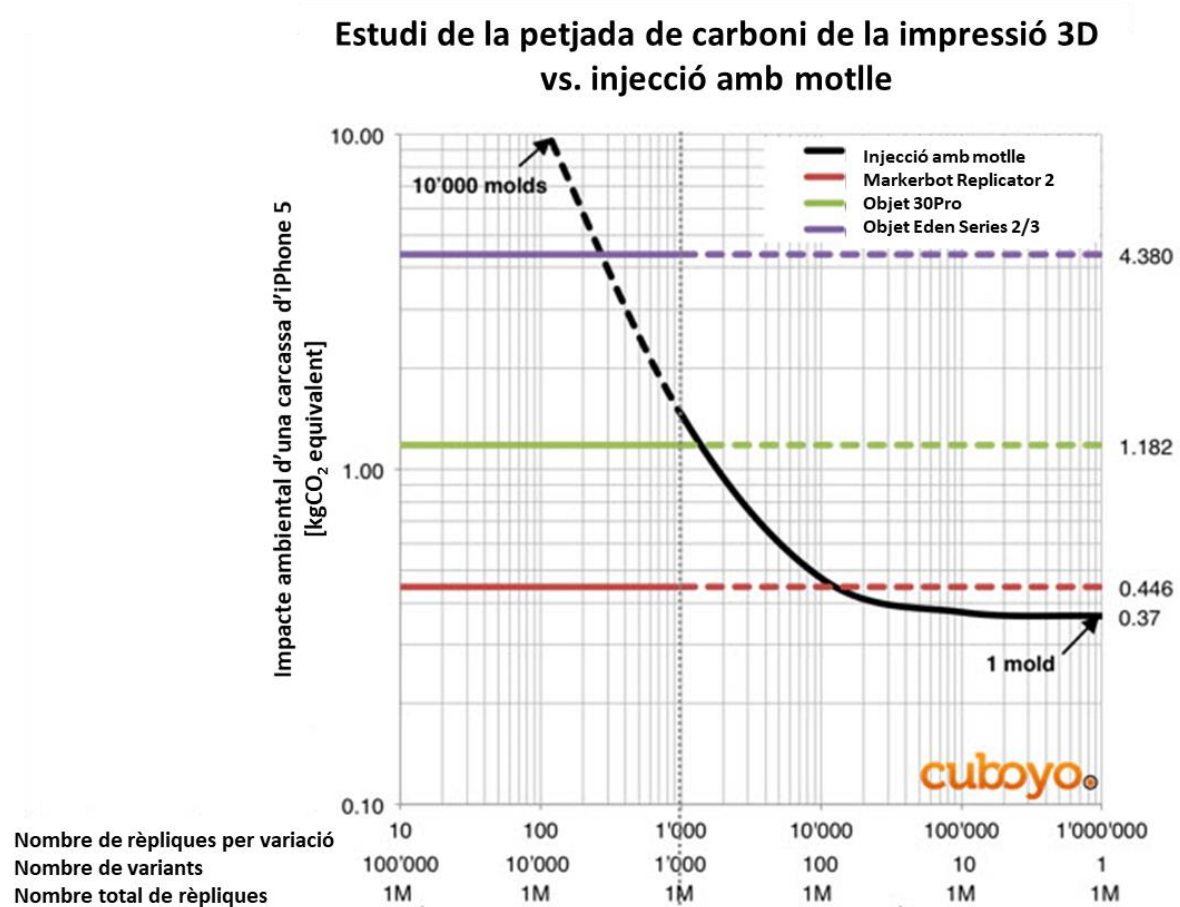


Figura 63. Estudi de Cuboyo de la petjada de carboni de la impressió 3D

Font: <http://www.cuboyo.com/environmental>

Per a definir aquest límit es compara l’impacte ambiental de fabricar una unitat de carcassa d’iPhone 5 amb tres tipus d’impressora 3D diferents i l’impacte ambiental de fabricar aquesta

mateixa carcassa a través de la injecció per motlle. A la Figura 63 es pot veure com l'impacte de fabricar la peça amb injecció va disminuint a mida que es fabriquen més rèpliques amb un mateix motlle. Si el nombre de rèpliques és inferior a 300 unitats, qualsevol de les impressores escollides per l'estudi genera menys quantitat de  $\text{kgCO}_2$  equivalent.

Tot i això, també s'ha de tenir en compte que moltes de les impressores 3D es basen en l'extrusió i deposició de material termoplàstic escalfat, que produeix emissions significatives de partícules ultrafines (UFP) el diàmetre de les quals és inferior a 100nm. Aquestes partícules són nocives per la salut perquè es depositen a les vies respiratòries. A més, l'ABS genera gasos com el monòxid de carboni i cianur d'hidrogen, entre altres compostos volàtils.

Així que pel què fa als materials, una línia de millora per a la indústria de la impressió 3D és poder reutilitzar material dels prototips fallits. En aquest sentit existeixen màquines capaces de reciclar plàstics ja usats, però la qualitat del material disminueix en cada cicle de reutilització.

## **11.2. Rodaments i coixinets SKF**

Pel què fa a l'impacte ambiental de rodaments i coixinets, s'han escollit de la marca SKF ja que l'empresa té una estratègia de minimització de l'impacte ambiental dels seus productes.

L'empresa ha llançat al mercat una nova línia de productes i serveis pensats per a millorar l'eficiència, reduir per tant les pèrdues d'energia i potenciar l'ús de noves tecnologies que aprofiten l'energia eòlica, solar i oceànica. Aquest enfoc combinat ajuda a reduir l'impacte ambiental de les seves operacions.



### 11.3. Recursos energètics

Tot i ser força complicat quantificar l'energia consumida a l'hora d'elaborar el projecte, s'ha realitzat una aproximació dels recursos emprats, que es troba a la Taula 11.

Els càlculs de kg de CO<sub>2</sub> han estat realitzats segons la proposta del govern de la província d'Aragó [12] i segons l'ICE 1.6 proposat per la Universitat de Bath [13].

Concepte	Quantitat	MJ/kg	MJ	kg CO <sub>2</sub> /kg	kg CO <sub>2</sub>
Material ABS	538,8g	95,3	51,35	3,1	1,67
Impressió 3D	59,82h	-	51,68 <sup>3</sup>	-	5,53
Consum de les eines emprades per dissenyar	320h	-	69,12 <sup>4</sup>	-	7,39
<b>TOTAL</b>			<b>172,15 MJ</b>		<b>14,59 kg CO<sub>2</sub></b>

*Taula 11. Càlcul d'emissions de CO<sub>2</sub> del projecte*

<sup>3</sup> La potència d'una impressora 3D d'ús domèstic es considera de 240W.

<sup>4</sup> La potència d'un portàtil d'ús domèstic es considera de 60W.



## Conclusions

El projecte *Avantprojecte del mecanisme d'un rellotge fet amb tren epicicloïdal* compleix amb els objectius que es van marcar inicialment:

- S'ha fet una recerca dels mecanismes que componen un rellotge i dels sistemes que s'han desenvolupat fins l'actualitat en aquest àmbit.
- S'ha estudiat el funcionament d'un tren d'engranatges epicicloïdal.
- S'ha fet un presisseny del rellotge amb peces que es poden fabricar amb impressió 3D. Els components normalitzats del rellotge són genèrics i fàcils de trobar en ferreteries industrials.
- S'ha simulat el comportament del mecanisme d'escapament, deixant la base per a futurs estudis de millora de la seva geometria.
- S'ha realitzat un primer dimensionat de la geometria de l'escapament.

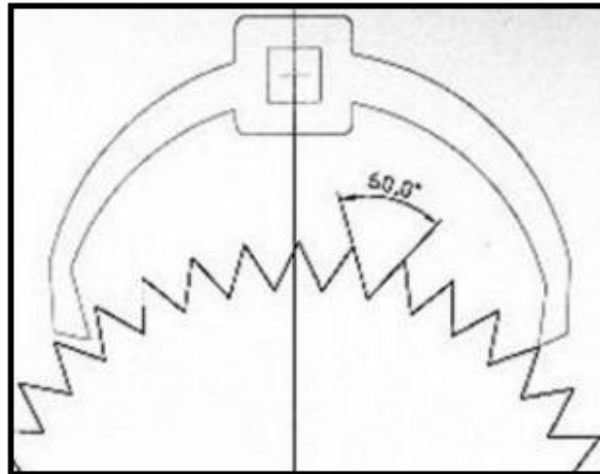
A títol personal:

- S'han pogut posar en pràctica els coneixements adquirits a l'assignatura Disseny de Màquines al realitzar l'avantprojecte d'un sistema mecànic.
- S'han pogut posar en pràctica els coneixements de Vibracions Mecàniques al fer un estudi sobre el sistema oscil·lant de l'escapament.
- S'ha ampliat el coneixement del programari MATLAB-SIMULINK.

## Línies de millora

Pel que fa a la recerca d'informació:

- Investigació d'altres tipus d'escapament com són el recoil, brocot i escapament català (Figura 64). Estudiar possibles adaptacions d'aquests escapaments per un rellotge amb volant d'inèrcia i no amb pèndol.



*Figura 64. Escapament català*

Pel que fa a l'estudi cinemàtic del tren epicloïdal i el dimensionat del sistema:

- Fer el disseny de tots els elements del rellotge en detall.
- Definir empíricament quina és la K de la molla del sistema balancejat.

Pel que fa a la simulació dinàmica del conjunt escapament:

- Ampliar el model SIMULINK per a fer un balanç d'energia del sistema de forma automàtica.
- Afegir a les equacions de moviment la força de fregament que pateix la molla del volant amb l'aire.
- Afegir a les equacions de moviment la força de fregament que hi ha entre les dents de la catalina i les cares d'impuls dels palets de l'àncora.
- Usar el model del SIMULINK per a la optimització de l'escapament, variant els paràmetres geomètrics del mateix per arribar a una millor solució.

## Agraïments

En primer lloc m'agradaria agrair al tutor del projecte, Joaquim M. Veciana, tot el suport que m'ha donat aquests mesos. Per permetre'm fer el projecte al meu ritme, ajudar-me a encaminar el treball cap al lloc correcte i donar-me consells de valor incalculable.

Agrair també a la família i amics, per escoltar-me parlar durant hores sobre rellotges.

Un agraïment molt especial al meu pare, per la seva curiositat innata i ganes de compartir el seu coneixement.

I sobretot un agraïment al Miquel, aquests mesos han estat plens de feina i estrès, però has estat amb mi durant tot el camí.

## Bibliografía

- [1] J. M. Pintor Borobia, «MECANISMOS DE CONTACTO DIRECTO: ENGRANAJES,» de *TEORÍA DE MÁQUINAS*, Navarra, Universidad Pública de Navarra, Nafarroako Unibertsitate Publikoa, 2015/2016, pp. 8.1-8.42.
- [2] J. Martínez Mirealles y J. M. Veciana Fontanet, Càlcul de Màquines. Quadern CM3 Engranatges, Barcelona: Serveis Gràfics Copisteria Imatge, S.L., Setembre 2014.
- [3] W. I. Milham, *Time and Timekeepers*, New York: MacMillan, 1945.
- [4] H. B. Fried, «MODERN MASTERPIECES OF HOROLOGY,» *Heritage, a supplement of JCK Magazine*, 1995.
- [5] M. Headrick, *Origin and Evolution of the Anchor Clock Escapement*, Control Systems magazine, 2002.
- [6] Wikipedia, «Verge escapement,» Wikimedia Foundation, Inc., 17 October 2017. [En línea]. Available: [https://en.wikipedia.org/wiki/Verge\\_escapement](https://en.wikipedia.org/wiki/Verge_escapement).
- [7] Wikipedia, «Pendulum clock,» Wikimedia Foundation, Inc., 22 April 2018. [En línea]. Available: [https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum\\_clock](https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_clock).
- [8] C. Huygens, *Horologium Oscillatorium* (An English translation by Ian Bruce), Recuperat el 14 November 2013..
- [9] Wikipedia, «Anchor escapement,» Wikimedia Foundation, Inc., 17 May 2018. [En línea]. Available: [https://en.wikipedia.org/wiki/Anchor\\_escapement](https://en.wikipedia.org/wiki/Anchor_escapement).
- [10] Wikipedia, «Balance Wheel,» Wikimedia Foundation, Inc., January 2018. [En línea]. Available: [https://en.wikipedia.org/wiki/Balance\\_wheel](https://en.wikipedia.org/wiki/Balance_wheel).
- [11] A. Hebra, «Clocks and the measurement of time,» de *The Physics of Metrology, All about Instruments: From Trundle Wheels to Atomic Clocks*, SpringerNewYork, 2010, pp. 39-64.





[12] E. y. T. Ministerio de Industria, «FACTORES DE EMISIÓN DE CO<sub>2</sub> y COEFICIENTES DE PASO A ENERGÍA PRIMARIA,» 2014.

[13] G. Hammond y C. Jones, «Inventory of Carbon and Energy (ICE),» Bath, 2008.

## Bibliografia complementària

[1] R. Du i L. Xie, «A Brief Review of the Mechanics of Watch and Clock, » de *The Mechanics of Mechanical Watches and Clocks*, Springer, 2012, pp 5-45

[2] M.V. Headrick, *CLOCK AND WATCH ESCAPEMENT MECHANICS*, 1997

[3] K. Harold Caleb, *A practical course in horology*, Peoria, Ill., The Manual arts press ,1944

[4] C. Harrold, *American Watchmaking - A Technical History of the American Watch Industry 1850-1930*, NAWCC Bulletin Supplement No. 14, Spring 1984, pp110-115

